

TEMÁTICA

pfiomrxfa dv4he5rsczn9i Ct9dxa7d1z9i Sozviomsco "J3chza7 6r8tmb a8t5b nsozviomsco uj3chza7 a8t5b

Operações com Números Naturais

TP3

TP3

Operações com Números Naturais

GESTAR I









Presidência da República

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Básica

Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

Diretoria de Assistência a Programas Especiais

# PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR I

# **MATEMÁTICA**

# **CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 3**

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

### MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO DIRETORIA DE ASSISTÊNCIA A PROGRAMAS ESPECIAIS

# PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR I

# **MATEMÁTICA**

# **CADERNO DE TEORIA E PRÁTICA 3**

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

#### © 2007 FNDE/MEC

Todos os direitos reservados ao Ministério da Educação - MEC. Qualquer parte desta obra pode ser reproduzida desde que citada a fonte.

### DIPRO/FNDE/MEC

Via N1 Leste - Pavilhão das Metas 70.150-900 - Brasília - DF Telefone (61) 3966-5902 / 5907 Página na Internet: www.mec.gov.br

IMPRESSO NO BRASIL



# **TP3: Operações com Números Naturais**

Apresentação
UNIDADE 1: Adição e subtração de números naturais
Seção 1: Adição e subtração numa perspectiva de tratamento integrado10
Seção 2: Adição e subtração de números naturais: o desenvolvimento do cálculo20
UNIDADE 2: Multiplicação e divisão de números naturais
Seção 1: Multiplicação e divisão numa perspectiva de tratamento integrado36
Seção 2: Multiplicação e divisão: desenvolvimento do cálculo48
UNIDADE 3: Operações com números naturais e o tratamento da informação
Seção 1: Coleta e organização de dados
Seção 2: Operações com números naturais e a organização de dados79
Correção das atividades de estudo
Unidade 195
Unidade 2
Unidade 3
Oficinas de Formação de Professores
Sessão Presencial Introdutória
Sessão Presencial Semanal: Unidade 1
Sessão Presencial Semanal: UNIDADE 2
Sessão Presencial Semanal: UNIDADE 3
Anexos

# Apresentação

### Professor

Até agora você caminhou por vários campos da Matemática, a começar pelos números naturais, passando pelas figuras geométricas e chegando a lidar com as medidas.

Nesse estudo que você desenvolveu, quase sempre com idas e vindas, às vezes por caminhos trabalhosos, o **número** aparece sempre com presença marcante para indicar o resultado de uma contagem ou o resultado de uma medição.

Neste módulo, você vai dirigir sua atenção, interesse e energia, em especial, aos números que representam resultados de uma medição, ou resultado de comparações entre grandezas, ou ainda o resultado de uma divisão. Enfim, você vai refletir sobre os **números racionais** e trabalhar com eles, para perceber como, a partir de diferentes usos no contexto social, você poderá levar seu aluno a construir esse conceito e a dar significado às suas representações fracionária e decimal.

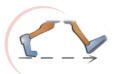


# INICIANDO NOSSA CONVERSA



Quantas vezes ouvimos isso de nossos alunos, não é mesmo?

Muito mais do que somar 12 com 17, o que nós, professores, desejamos é que os alunos saibam **quando** e **por que** somar 12 com 17, diante de uma situação-problema como a anterior. A escola tem a obrigação de fazer o aluno dar esse passo, indo além de uma simples técnica operatória.



# DEFININDO NOSSO PONTO DE CHEGADA

Ao refletir sobre o ensino das operações de adição e subtração com números naturais, esperamos que você seja capaz de:

- explicar as diferentes idéias veiculadas pelas operações de adição e subtração;
- criar situações didáticas que levem o aluno a reconhecer as idéias dessas operações e utilizá-las na resolução de situação-problema;
- identificar a indissociável relação entre adição e subtração como operações inversas;
- justificar os algoritmos usuais a partir das regras do Sistema de Numeração Decimal;
- definir diretrizes para uma ação didática que leve o aluno do ensino fundamental a desenvolver o cálculo com compreensão.



Objetivos a serem alcançados nesta seção:

- explicar as diferentes idéias veiculadas pelas operações de adição e subtração;
- criar situações didáticas que levem o aluno a reconhecer as idéias dessas operacões e utilizá-las na resolução de situações-problema.

### Situações aditivas e subtrativas

No início da escolaridade, o trabalho com a adição e subtração de números naturais pode ter como contexto a resolução de problemas e como suporte a intuição das crianças, suas experiências em situações reais e concretas com pequenas quantidades, com a contagem ou ainda com a sobrecontagem.

Isso significa que, inicialmente, os problemas aditivos e subtrativos serão abordados ao mesmo tempo em que se trabalha a construção do significado do número natural, sem a preocupação com registros usuais (como 3 + 5 = 8), porém dando ênfase às idéias veiculadas por esses problemas.

Para crianças que desconhecem as técnicas operatórias ou os registros usuais, o problema seguinte não apresenta qualquer dificuldade, pois se aproxima das situações que ela vive em seu dia-a-dia.

#### **Problema 1**

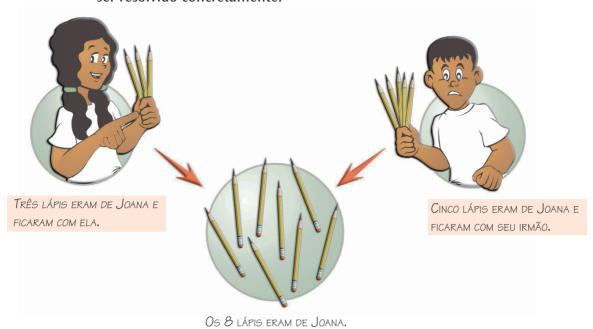
Se Joana põe seus 5 lápis sobre a mesa vazia e Mauro põe seus 3 lápis sobre a mesma mesa, quantos lápis ficarão sobre ela?

A sala de aula proporciona inúmeras oportunidades para que o aluno vivencie situações como essa. É possível que algumas crianças sintam a necessidade de recontar todos os lápis para resolver o problema, enquanto outras fazem apenas a sobrecontagem dos 3 lápis de Mauro, a partir dos 5 lápis de Joana.

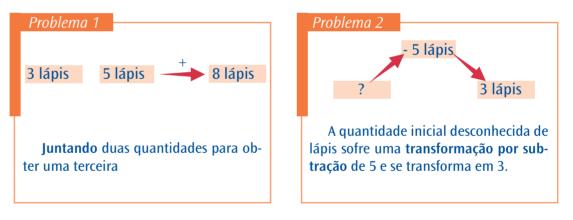
A mesma adição 3 + 5 = 8 que "resolve" o problema anterior também "resolve" este outro:

### Problema 2

Joana tinha alguns lápis e deu 5 deles a seu irmão, ficando com 3. Quantos lápis tinha Joana inicialmente? Embora esse problema seja bem "mais difícil" do que o primeiro, ele também pode ser resolvido concretamente.



Para resolver os problemas 1 e 2 basta adicionar 3 e 5. Entretanto, é fácil notar que as duas situações têm características bem diferentes: enquanto a primeira é **aditiva**, a segunda é **subtrativa**. Os esquemas abaixo têm o objetivo de mostrar a você essas duas características diferentes.



Pelo fato de a situação apresentada no problema 2 ser de caráter subtrativo, é muito comum as crianças resolverem-na efetuando 5 - 3 = 2.



Professor, suponha que um aluno que resolvesse o problema anterior efetuando 5 - 3 = 2. Como você procederia para levá-lo a perceber que essa não é uma boa maneira de resolver a situação proposta?

Teoria e Prática 3 · Undade

Estimar o resultado de um problema é uma habilidade importante a ser desenvolvida, mesmo antes do aluno apropriar-se de quaisquer técnicas operatórias. No caso do problema 2, podem ser usadas perguntas como:

Você acha que, no início, Joana tinha

- menos do que 5 lápis? por quê?
- mais do que 5 lápis e menos do que 10? por quê?
- mais do que 10 lápis? por quê?

Perguntas dessa espécie poderão fazer com que o aluno perceba que "2" não é uma resposta adequada, revendo, inclusive as estratégias utilizadas para resolver a situação.

#### Em resumo...

Esses dois problemas foram aqui discutidos para que você possa perceber que, embora necessitemos de uma mesma adição para resolvê-los (3 + 5 = 8), as idéias que eles contêm são diferentes:

**Problema 1 •• juntar** duas quantidades conhecidas para obter um total desconhecido;

**Problema 2 •• transformar** uma quantidade inicial desconhecida, subtraindo outra conhecida, para obter uma terceira conhecida.

Para levar as crianças a identificarem com competência a operação que resolve um problema, é conveniente colocá-las em contato com variadas situações aditivas ou subtrativas que, para serem resolvidas, ora demandam adições, ora subtrações.

É ilusão pensar que problemas que demandam uma adição para serem resolvidas são mais "fáceis" do que aqueles que necessitam de uma subtração para encontrarmos sua solução. Experiências atuais com alunos de 7 a 14 anos nos mostram que, embora o problema 2 exija uma adição, só é resolvido com sucesso por crianças com mais de 9 anos, enquanto um problema como "Se da minha caixa com 12 lápis retiro 5, quantos lápis ficam na caixa?", que exige uma subtração, é resolvido com muito sucesso por crianças de 7 anos.

Tem-se observado que as dificuldades dos alunos aumentam quando precisam resolver situações subtrativas que exigem uma adição, ou vice-versa, situações aditivas que necessitam de uma subtração para serem resolvidas. Um exemplo desse segundo caso será visto no Problema 3.

Assim, atenção especial deve ser dada às relações e ligações fortes que as situações aditivas e subtrativas mantêm entre si. Veja mais um exemplo.

#### **Problema 3**

Mário tinha 5 bolinhas de gude. Ele ganhou outras num jogo e agora tem 9 bolinhas. Quantas bolinhas Mário ganhou no jogo?

"Tem-se observado que as dificuldades dos alunos aumentam quando precisam resolver situações subtrativas que exigem uma adição, ou vice-versa..."

A descoberta de quantas bolinhas Mário ganhou no jogo nem sempre é feita mediante um procedimento subtrativo, isto é, muitas crianças empregam uma estratégia aditiva para resolver a situação. Veja só.

#### Resolução de Bia

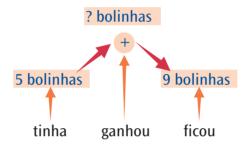
Ela não sabe que operação resolve o problema, nem os registros usuais das operações, porém, apoiando-se nos dedos ou na tira numérica procede assim: vai tirando 5 bolinhas, uma a uma, das 9 bolinhas que Mário tem agora, obtendo as 4 bolinhas que ele ganhou.

#### Resolução de André

Ele não sabe a operação que resolve o problema, nem os registros usuais das operações. **Desenhando inicialmente 5 bolinhas, foi acrescentando 1 bolinha de cada** vez em seu desenho, até completar 9. Contou, em seguida, as bolinhas que acrescentou além **das 5**.

Você reparou que o problema 3 retrata uma situação aditiva?

O esquema abaixo vai mostrar isso a você:



Note que a quantidade desconhecida ? de bolinhas que Mário ganhou transforma por adição a quantidade de bolinhas que tinha (5) para a quantidade com que ficou (9).

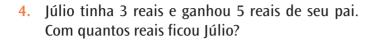
Quanto ao procedimento das crianças, percebe-se que Bia usou uma estratégia subtrativa para resolver o problema, subtraindo as 5 bolinhas das 9 bolinhas, uma a uma. André, no entanto, usou uma estratégia aditiva, somando bolinhas, uma a uma, às 5 que Mário já tinha até completar 9.

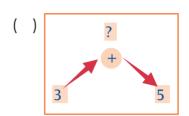
Isso significa que, no início da aprendizagem, as crianças podem apresentar estratégias aditivas ou subtrativas para resolverem uma situação aditiva (ou subtrativa), mesmo que não conheçam nem utilizem a escrita aditiva ou subtrativa (9 - 5 = 4, no caso do problema 3). Na verdade, não se deseja deles neste momento esse registro formal, mas sim, que utilizem os conhecimentos que já têm a respeito de contagem, sobrecontagem, consecutivo, antecessor etc., para resolverem as situações aditivas e as subtrativas com estratégias próprias.

# Atividade 2

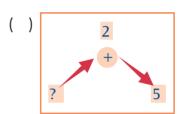
a) Prosseguindo com problemas, na próxima atividade você encontra mais cinco situações aditivas e, ao lado, cinco esquemas que as representam.

Cabe a você identificar o esquema que representa cada problema.

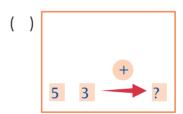




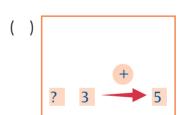
5. Numa caixa há 3 maçãs. Quantas maçãs tenho que pôr nessa caixa para que ela fique com 5 maçãs?



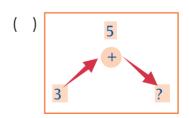
6. José ganhou 2 cadernos e ficou com 5. Quantos cadernos tinha no início?



7. No tabuleiro há 5 pedaços de bolo de fubá e 3 pedaços de bolo de coco. Quantos pedaços de bolo há nesse tabuleiro?



8. Maíta e Dodô ficaram com 5 brinquedos quando puseram seus brinquedos juntos. Dodô tem 3 brinquedos. Quantos brinquedos tem Maíta?



b) Invente um problema cuja situação tenha caráter aditivo e possa ser representada por 5 ? + 8 , em que as quantidades 5 e ? são combinadas para se obter a quantidade 8. Embora os problemas de 4 a 8 apresentem situações aditivas, as operações adequadas para resolvê-los são diferentes assim como também são diferentes as idéias e ações que elas expressam, como mostra a tabela seguinte.

**Obs.:** Essa tabela foi feita somente para ajudar a análise do professor e não deve ser dada ao aluno.

Problema	<b>O</b> peração	<b>A</b> ção
4 3 + 5 = 8		acrescentar
5	5 - 3 = 2	completar
6	5 - 2 = 3	tirar
7	5 + 3 = 8	juntar
8	5 - 3 = 2	tirar

Algo semelhante ocorre com as situações subtrativas. Você já pensou sobre uma delas no problema 2. Vamos analisar outras?



Algumas quadrículas da tabela abaixo já foram preenchidas, inclusive com o problema 2, já analisado anteriormente, passando agora a ser o problema 9.

Agora é sua vez. Pense nos problemas, invente outros, solte a imaginação e preencha as quadrículas da tabela que estão vazias.

PROBLEMA	Esquema	Situação	<b>O</b> PERAÇÃO
9. Joana tinha alguns lápis e deu 5 de- les a seu irmão, ficando com 3 lá- pis. Quantos lápis tinha Joana ini- cialmente?	5 - 3	Subtrativa	3 + 5 = 8
10. Num ônibus viajavam 8 passageiros. Quando o veículo parou, desceram 5 passageiros. Com quantos passageiros o ônibus continuou seu caminho?			
11. Margarida levou 8 bolachas para co- mer na escola. Ao voltar para casa, verificou que ainda tinha 3 bola- chas. Quantas bolachas Margarida comeu na escola?			
12.	? 5		

Também as situações subtrativas podem ser resolvidas com operações diversas (adição ou subtração) que expressam idéias diferentes. Veja só.

Problema	<b>O</b> peração	<b>A</b> ção
9	3 + 5 = 8	acrescentar
10	8 - 5 = 3	tirar
11	8 - 2 = 5	tirar
12	5+3+8	acrescentar

### Como trabalhar essas idéias com os alunos?

No início da aprendizagem para que os alunos aprendam a relacionar as idéias aditivas e subtrativas identificando a operação que resolve cada situação, os problemas podem ser apresentados oralmente, por escrito, por meio de figuras, em forma de jogos etc.

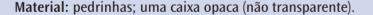
A partir da leitura dos fascículos anteriores, você já refletiu sobre as vantagens do trabalho com jogos na aprendizagem da Matemática. Vamos então analisar alguns outros que podem ser feitos em sala de aula, e que apresentam a mesma estrutura dos problemas até aqui discutidos.

Esses jogos podem ser desenvolvidos com as crianças antes de elas enfrentarem problemas escritos, pois o interesse maior é levá-las a identificar a situação dada como aditiva ou subtrativa e a imaginar estratégias para resolvê-la. Depois de descobertas estratégias de resolução, o professor pode informar os sinais que representam o pensamento das criancas.

Vamos aos jogos!

### As pedrinhas e a caixa

INDO À SALA DE AULA



#### 1°. procedimento:

O professor convida um aluno para pôr na caixa uma certa quantidade de pedrinhas. Essa quantidade é informada para a classe ou marcada no quadro de giz. Em seguida, outro aluno faz o mesmo, sendo informado pelo professor qual quantidade de pedrinhas ele deve colocar na caixa. Essa informação deve ser ouvida pela classe toda. Os alunos não devem colocar as pedras uma a uma na caixa, mas sim colocálas de uma só vez. A seguir, o professor pede à classe que descubra quantas pedrinhas há na caixa e como fizeram para descobrir.

#### 2° procedimento:

Igual ao 1°. Um outro aluno é convidado a tirar uma certa quantidade de pedrinhas da caixa. Ao final, o professor pergunta a este aluno e a alguns outros da sala como fizeram para descobrir quantas pedrinhas ficaram na caixa.

### 3° procedimento:

O 3º procedimento é semelhante ao primeiro, com uma diferença: o segundo aluno é convidado a descobrir quantas pedrinhas deve pôr na caixa para que fique lá dentro uma quantidade qualquer dita pelo professor. Ao final, perguntar aos alunos da sala como fizeram para descobrir.



Esse é um jogo que deve ser proposto à classe mais de uma vez, para dar chance a todas as crianças de participarem. Além disso, as estratégias de resolução das crianças vão depender do "tamanho" (dimensão) dos números ditos pelo professor. Por exemplo, para evitar a recontagem, o professor pode propor que, depois da primeira quantidade suficientemente grande de pedrinhas, seja posto na caixa um pequeno número delas (de 1 a 4) pelo segundo aluno.

Abaixo, elencamos algumas vantagens apresentadas por esse jogo.

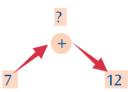
- Os alunos podem validar suas respostas, contando os objetos na caixa.
- A explicação do procedimento de resolução de cada aluno para chegar à resposta é um momento importante do jogo. Ao explicar como procedeu, o aluno toma consciência da estratégia utilizada e também desenvolve a habilidade de comunicar aos outros seu procedimento, além de permitir aos colegas apropriarem-se de novas idéias.



a) Analisando o jogo "As pedrinhas e a caixa" identifique, na tabela, cada uma das três situações como aditiva ou subtrativa:

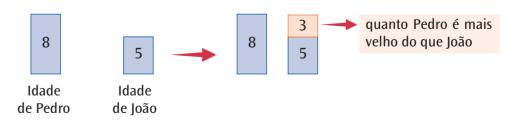
Procedimento	Situação
1º	
2°	
3°	

b) O esquema abaixo pode representar qual dos procedimentos desse jogo?



Embutida numa situação subtrativa ainda podemos observar a idéia de **compara-**ção, como no problema abaixo.

Pedro tem 8 anos e João, 5. Quem é mais velho? Quanto mais velho?



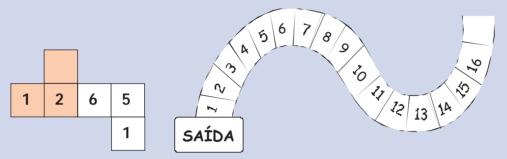
Para finalizar, você vai conhecer mais um jogo em que as crianças podem fazer previsões, estimativas, identificar quando devem acrescentar ou subtrair quantidades, além de lidar com a "distância entre dois números" numa pista numérica e com a sorte!

# INDO À SALA DE AULA



#### Prevendo resultados

Material: uma pista com casas numeradas de 1 a 30 (anexo 1) um dado com 3 faces brancas e outras 3 cinzas (anexo 2)



Procedimento: jogo em duplas.

- Para iniciar o jogo, todos os jogadores põem seus marcadores diferentes (feijão e milho, por exemplo) na SAÍDA. Só poderão sair, se obtiverem pontos numa face branca e avançarão tantas casas quantas indicarem os pontos dessa face.
- Durante o jogo quem obtém uma face cinza no dado recua tantas casas quantas seus pontos indicarem. Quem obtém face branca, avança.
- A partir da 2ª jogada, cada jogador deve apostar em voz alta que vai tirar um certo resultado no dado e chegar a uma determinada casa, sem contar as casas no tabuleiro. Por exemplo, na 1ª jogada o jogador chega na casa 4 e aposta que vai tirar 5 no dado para chegar na casa 9. Ou aposta que vai tirar 2 no dado, voltando à casa 2.
- Se o jogador fez uma aposta correta ele ganha 1 ponto ( no nosso exemplo ele fez aposta correta pois 4 + 5 = 9, ou 4 2 = 2).
- Depois de apostar, o jogador lança o dado.
- Se ele acertar a aposta, ganha outro ponto.
- O jogo termina quando um dos dois jogadores atinge a casa 30 ou a ultrapassa.
- Ganha o jogo quem tiver feito mais pontos.
- Os jogadores podem marcar seus pontos numa tabela como a seguinte:

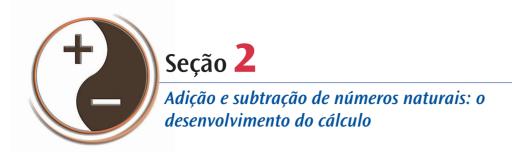
Número de pontos de cada jogada								
Jogada Jogador	<b>2</b> <sup>a</sup>	3ª	<b>4</b> <sup>a</sup>	5ª	6ª	7 <sup>a</sup>	8ª	Total
José		-		- 1	11	11	-	9
Helena	I		11	11			11	8



a) Professor, você considera que em algum momento desse jogo o aluno ro situações aditivas? E subtrativas? Explique quando.	esolve 
b) Para que um jogador seja vencedor nesse jogo é necessário que ele obten dado somente faces brancas? Por quê?	ha no
c) Cite uma habilidade que os alunos podem desenvolver ao participarem jogo. Consulte novamente o texto desta seção, bem como o que foi discuti TP2, para ajudá-lo a responder a essa pergunta.	



- No início da aprendizagem da adição e subtração de números naturais a ênfase deve ser colocada na identificação das características que cada situação apresenta: aditiva ou subtrativa. O aluno mostra que identificou corretamente a situação, quando elege a operação que a resolve adequadamente, mesmo que não utilize estratégias usuais de cálculo.
- As situações escolhidas podem ser do tipo em que combinamos quantidades aditivamente (com duas conhecidas e uma desconhecida), do tipo em que transformamos uma quantidade aditivamente ou subtrativamente, por meio de outra quantidade, para obtermos uma terceira quantidade (com duas conhecidas e uma desconhecida) ou ainda do tipo em que comparamos quantidades.
- As atividades ou problemas oferecidos aos alunos devem levá-los a tomar consciência de que é possível prever mentalmente certos resultados de uma situação aditiva ou subtrativa, na procura de um total, de quantos faltam, do que resta, do quanto tem a mais etc.
- No desenvolvimento das atividades é preciso dar oportunidade aos alunos de inventar ou experimentar estratégias pessoais, de elaborar novos processos para "calcular", num contexto numérico que lhe seja familiar e, também, de validar os resultados encontrados.



Objetivos a serem alcançados nesta seção:

- identificar a indissociável relação entre adição e subtração como operações inversas;
- justificar os algoritmos usuais a partir das regras do Sistema de Numeração Decimal;
- definir diretrizes para uma ação didática que leve o aluno a desenvolver o cálculo com compreensão.



Muito antes de entrar na escola, as crianças convivem socialmente com a adição e subtração, mesmo sem terem construído qualquer concepção sobre o número natural ou sobre tais operações. As quadrinhas que você acabou de ver não nos deixam mentir! O que dizer, então, dos totais de pontos obtidos num jogo ou das moedinhas que ganharam do pai.

Como aproveitar os saberes dessas crianças para que possam efetuar cálculos com competência para resolver problemas?

Efetuar cálculos e resolver problemas são duas dimensões que se complementam. De nada adianta um aluno ser exímio calculador, se não consegue eleger as operações adequadas para resolver as situações que lhes são propostas, seja pelo professor ou pela realidade em que vive.

Na seção anterior, você lidou com o significado das idéias que caracterizam situações aditivas e subtrativas. É "ao longo deste trabalho que os alunos constatam os fatos básicos das operações (cálculo com dois termos, ambos menores do que dez), constituindo um repertório que dá suporte ao cálculo mental e escrito." (PCN - Matemática)

Além disso, as situações-problema oferecidas aos alunos devem ser desafiantes e bastante próximas de sua realidade para que tenham algum significado para eles e os incentivem a resolvê-las.

Com isso, aos poucos, as crianças vão memorizando esses fatos fundamentais, como também descobrindo propriedades da adição, como a comutativa. Ao longo do tempo, descobrirão também a propriedade associativa e a existência do elemento neutro, muito embora não seja necessário (nem desejável no início) saber o nome de cada propriedade.

Veja um exemplo de como isso pode ser conseguido com o jogo **As pedrinhas e a caixa**, sugerido anteriormente.



# INDO À SALA DE AULA

### As pedrinhas e a caixa

O jogo é o mesmo sugerido na seção 1.

Depois de realizar o jogo umas duas vezes, o professor coloca no quadro de giz uma tabela e solicita aos jogadores que registrem as quantidades de pedrinhas colocadas na caixinha em cada jogada, discutindo o total com a classe.

#### Por exemplo:

Nome da dupla	Nº de pedrinhas do 1º aluno	N° de pedrinhas do 2° aluno	Nº de pedrinhas na caixa
Joana/Edu	4	5	9
Paulo/Maria	1	3	4
Mel/Ju	1	5	6
Zé/Tina	2	4	6
Carlos/Rê	5	3	8
Fê/Lia	5	4	9
Dodô/Maíta	3	3	6

Ao final do jogo as crianças são convidadas a analisar a tabela e dizer o que perceberam nela.



E você, professor, o que observa nessa tabela?

É bem possível, que entre suas observações, você tenha notado que:

• tanto faz colocar na caixa 4 pedrinhas e depois 5 ou primeiro 5 e depois 4 pedrinhas, pois na caixa ficarão 9 pedrinhas, em ambos os casos; essa observação é um primeiro passo para que o aluno perceba a propriedade comutativa da adição;

- para que a caixa fique com um total de 6 pedrinhas colocadas por dois alunos, só há três (e só três) possibilidades, de resolução, sem levar em conta a ordem em que elas são colocadas:
  - um aluno põe 1 pedrinha e outro põe 5;
  - um aluno põe 2 pedrinhas e outro põe 4;
  - um aluno põe 3 pedrinhas e outro põe 3.
- o número de pedrinhas da caixa é sempre maior do que o número de pedrinhas que cada criança pôs na caixa.

Nesse tipo de atividade é o professor quem sugere as quantidades de pedrinhas a serem colocadas na caixa de acordo com as propriedades que ele deseja explorar com as crianças.

Num trabalho desse gênero, os alunos exploram inicialmente as idéias aditivas e subtrativas de situações-problema com suas próprias estratégias e constróem simultaneamente os fatos básicos da adição e da subtração, registrando-os com seus próprios recursos para, só depois, dar um significado a escritas formais como 3 + 2 = 5 ou 8 - 5 = 3.

## Dando significado aos símbolos







A escrita aditiva ou subtrativa usual (como 3 + 5 = 8 ou 6 - 2 = 4) deve ser trabalhada no contexto da resolução de problemas para que a criança possa comunicar resultados. É assim que ela vai conferindo significado a esse tipo de registro.

Partindo dos registros pessoais dos alunos, o professor poderá propor uma discussão com a classe sobre qual é o mais simples, qual é o que melhor comunica a idéia do colega para só depois propor a eles o uso dos sinais +, - e =.

Veja só o exemplo de uma atividade em que o recurso utilizado é o jogo, cujo objetivo é levar o aluno a comunicar a um colega o total de pontos obtidos por ele.

# INDO À SALA DE AULA



#### As etiquetas

Material: dois dados comuns para cada grupo de 4 alunos, três etiquetas retangulares de papel (4cmx3cm) por aluno, uma calculadora por grupo de 4 alunos.

#### **Procedimento**

- Organizar os alunos em grupos de 4 crianças.
- Fornecer a cada grupo o material descrito acima. Tanto os dados quanto as
  etiquetas podem ser previamente confeccionados pelos próprios alunos,
  orientados pelo professor numa aula anterior, aproveitando para explorar
  conceitos geométricos.
- O jogo consta de 3 rodadas. Em cada rodada, cada aluno na sua vez lança os dois dados e registra numa etiqueta quanto obteve em cada dado e o total de pontos obtidos.



# INDO À SALA DE AULA

- Tendo preenchido suas etiquetas, cada aluno de um grupo vai trocá-las pelas etiquetas de um aluno de outro grupo.
- Com as etiquetas dos colegas em mãos, cada criança vai interpretar o que ocorreu nas três jogadas desse colega, anotando suas conclusões numa folha.
- O professor sorteia alguns alunos da classe para colocarem no quadro de giz o registro das etiquetas que receberam e como interpretaram o que nelas estava escrito.
- Caso o aluno que registrou os resultado de suas jogadas tenha cometido algum tipo de erro, a etiqueta é devolvida a ele para que, com o auxílio da calculadora, confirme o total de pontos ou reescreva sua mensagem (no caso de ela estar incompreensível ou confusa).
- Ao final, todos os alunos serão convidados a confirmar os resultados de suas etiquetas com a calculadora e a reescrevê-los se acharem necessário.

Terminada a atividade, o professor pode aproveitar os registros de algumas etiquetas que já estavam no quadro de giz para que as crianças possam analisá-los, compará-los, verificando se:

- a mensagem comunicava claramente o que o jogador queria dizer;
- todos compreenderam a mesma coisa ao lerem a etiqueta;
- o autor da etiqueta inventou algum símbolo novo para transmitir sua mensagem;
- algum aluno utilizou os sinais +, e = que aparecem na calculadora.

Caso a escrita 3 + 2 = 5 não tenha aparecido espontaneamente, o professor pode introduzi-la, explicando que ela é reconhecida universalmente.

**Observação:** A familiarização com a calculadora pelos alunos pode ser feita em atividades que precedam essa.

Posteriormente a esse jogo, outro semelhante pode ser desenvolvido com as crianças, para introduzir a escrita subtrativa. Para tanto, basta mudar a regra do jogo: do número maior de pontos obtidos num dos dados tire o número menor.

No final da atividade, a escrita 6 - 4 = 2 deverá ter o mesmo significado para todas as crianças: o jogador obteve 6 pontos num dado e 4 no outro e tirando o menor do maior obtém-se 2.

Para ampliar o repertório dos fatos fundamentais a ser incorporado pelas crianças e a utilização dos registros numéricos com algarismos, um desdobramento desse jogo poderá ser proposto da seguinte maneira:

- os dados utilizados são de cores e números diferentes (ao invés de pontos):
  - dado branco com faces numeradas de 1 a 6,
  - dado cinza com faces numeradas de 7 a 12.
- a regra do jogo também é modificada: dos pontos obtidos no dado cinza, tirar os pontos obtidos no dado branco.

Também nesse caso, o objetivo é levar os alunos a fazerem registros dos pontos obtidos nos dados e registro do resultado da subtração. Registros como 12 - 7 = 5

deverão aparecer, imitando um pouco o que foi feito no jogo anterior para comunicar que o jogador obteve 12 no dado cinza, 7 no branco e que o resultado final é 5.

A compreensão dos registros aditivos e subtrativos com os sinais usuais também pode ser favorecida quando o aluno recorre à composição e decomposição de quantidades. As crianças que compõem e decompõem quantidades constróem também a habilidade de estimar resultados efetuando o cálculo mental com competência.

Um trabalho em malhas quadriculadas pode ajudar o aluno a compor e a decompor quantidades, conferindo ao registro usual algum sentido. Veja só.

# INDO À SALA DE AULA



#### Pintando tiras

#### 1ª situação:

Dê a cada aluno uma folha quadriculada com uma tira pintada de cinza.

Solicite a eles que pintem outras tiras do mesmo tamanho dessa, porém com duas partes pintadas de cores diferentes.

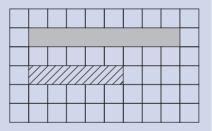
As tiras pintadas devem ser todas diferentes entre si e as cores utilizadas também. Peça aos alunos que representem cada tira pintada com uma escrita aditiva ao lado dela.

#### 2ª situação:

Dê a cada aluno uma folha como o modelo ao lado.

Proponha às crianças o seguinte problema:

"Se da tira cinza você tirar um pedaço do tamanho da tira listada, que tamanho da tira você obterá? Represente isso com uma sentença matemática".

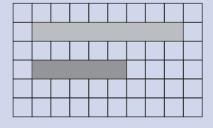


#### 3ª situação:

Qual é a barra maior?

Ouanto ela é maior?

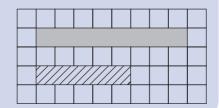
Como você representa essa diferença com uma escrita matemática?



### 4ª situação:

Que tira devemos juntar à tira listada para ficarmos com uma tira do tamanho da cinza?

Represente isso com uma escrita matemática.



Você percebeu que nas situações 2, 3 e 4 as idéias expressas por elas são as de tirar, comparar e completar, respectivamente? Do ponto de vista numérico, as operações que resolvem essas três situações são:

situação 
$$2 \rightarrow 8 - 5 = 3$$

situação  $3 \rightarrow 8 - 3 = 5$ 

situação  $4 \rightarrow 8 - 5 = 3$ 

A situação 1, além de levar o aluno a utilizar a escrita aditiva usual, leva-o a compor uma quantidade de várias maneiras, favorecendo o uso do cálculo mental. Esse processo é mais rico do que o simples processo da contagem.



E você, professor, como introduz as escritas aditivas e subtrativas em suas aulas Descreva uma atividade desenvolvida por você relacionada ao tema proposto.	5?

# As técnicas operatórias da adição e da subtração: algoritmos usuais.

No início da aprendizagem das operações com números naturais, o trabalho que leva as crianças a identificarem as operações adequadas para resolver um problema e a darem significado para os sinais +, - e =, não se completa num único período letivo. As idéias se aperfeiçoam à medida que:

- os fatos fundamentais são memorizados;
- novas situações são oferecidas às crianças;
- aumenta a ordem de grandeza (tamanho) dos números envolvidos nas situações é aumentada;
- as condições de pensamento das crianças evoluem, passando do período concreto operacional para o pré-formal.

# Como as crianças passam dos cálculos mentais para os registros escritos e o aprendizado de algoritmos?

Quando a criança opera com números pequenos, os processos utilizados por ela para encontrar resultados são basicamente os de cálculo mental. A importância do cálculo mental nessa fase reside principalmente em dar sentido às operações e em prever resultados. Desse modo, não tem muito sentido utilizar os algoritmos usuais para efetuar 3 + 5 ou 8 - 5, por exemplo.

Teoria e Prática 3 • Undade

Entretanto, à medida que o professor vai propondo situações em que as quantidades aumentam, surge a necessidade de a criança recorrer também a algum processo que lhe permita encontrar o resultado de uma operação "por escrito", já que o registro favorece o cálculo e a revisão do raciocínio feito.

Esse trabalho deve partir sempre das estratégias e registros pessoais dos alunos. Veja como dois alunos registram a resolução do problema abaixo.

Paulo tem 257 reais e ganha de seu pai 124 reais. Com quantos reais ele fica?

## Registro da 1º resolução

notas de 100	notas de 10	notas de 1
Tinha 2	Tinha 5	Tinha 7
Ganho 1	Ganho 2	Ganho 4
Fico com 3	Fico com 7	Fico com 11
		Fico com 1 de dez e 1 de um

Total: 3 de cem, 8 de dez, 1 de um ou 381 reais

### Registro da 2ª resolução

Esses registros devem ser apresentados a todos os alunos para que possam analisá-los (qual o mais simples? o mais explicativo?). Em seguida, inicia-se um trabalho de introdução aos algoritmos usuais, que são processos mais rápidos, de fácil visualização e utilização. Além disso, há a vantagem de serem reconhecidos por todos, pois representa uma forma universal de comunicação.

É conveniente, então, iniciar o ensino dos algoritmos da adição e da subtração quando os alunos já dominam os processos de agrupamentos e de trocas e a representação dos números no SND, porque o desenvolvimento dos algoritmos usuais é baseado nas regras desse sistema.

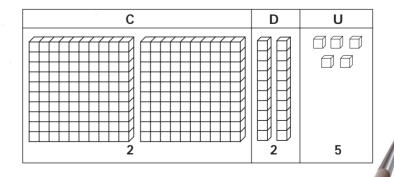
No início, o apoio de material concreto (palitos, tampinhas, objetos escolares) é importante, assim como o apoio do ábaco. Igualmente importante é dar condições às crianças para que efetuem as ações concretas de agrupar, trocar, destrocar quantidades antes de registrá-las no caderno por meio dos algoritmos convencionais.



lembrete

Ábaco é um instrumento de manipulação que ajuda a fazer cálculo, como por exemplo cartaz de prega, contador, cartaz de valor de lugar, soroban etc.)

Veja um ábaco de papel onde está representada a quantidade 225 no SND





# INDO À SALA DE AULA

### Um problema de adição

Duas irmãs vão à feira só com notas de 10 reais e de 1 real. Jovelina leva 43 reais e Selma, 35. Para comprar um tapete para sua casa, gastam todo dinheiro. Quanto elas pagaram pelo tapete?

## Uma estratégia

_			
٨	R	٨	n

С	D	U
	10 10	AND CONTRACTOR OF THE PARTY OF
	10 10	1106
	10 10	100
	10 10 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00	100
		1106
	10 10 PREATS	1106
	10 10 P	1106
	10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	106

### REGISTRO

D	U
4	3
	+
3	5
7	8

## Outro problema

Numa outra ocasião em que Jovelina tinha 28 reais e Selma 45, elas juntaram seu dinheiro e gastaram tudo na compra de alguns quadros. Quanto custaram os quadros?

### A mesma estratégia

ÁBACO

C	D	U
	10 PREATS	
	10 0 0 REALS	1106
		100
		100
		1106
		1106
	10 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00	106
	10 0 00 10 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00	1106
	10 10 P	106
	10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	100
	10 10 REALS	

#### **REGISTRO**

D	U
2	8
	+
4	5
7	3

Teoria e Prática 3 · Undade '

A utilização do ábaco para efetuar os cálculos antes de representá-los no caderno ajuda o aluno a compreender porque no algoritmo usual ele deve colocar unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e assim por diante.

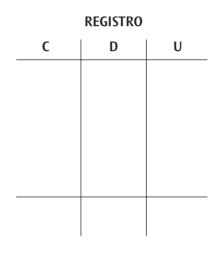
Além disso, uma vez dominada a técnica para somar duas parcelas o aluno terá muita facilidade para somar 3 ou mais parcelas.



Professor, analise o problema ao lado, represente sua resolução no ábaco e também por meio do algoritmo.

Desejando embalar o material escolar de sua turma para uma excursão, Dona Marília resolveu usar um tipo de caixa em que cabem 100 objetos. Ela juntou 35 lápis pretos, 35 borrachas, 26 lápis de cor e 8 réguas. Uma caixa é suficiente para guardar esse material?

ÁBACO					
С	D	U			



Se durante a aprendizagem os alunos já dominam os processos de agrupamentos e trocas no SND e os fatos fundamentais da adição, e iniciam o aprendizado do algoritmo da adição por meio do uso do ábaco (antes do registro), é conveniente que as adições com ou sem reserva ("vai 1") sejam trabalhadas simultaneamente.

Quanto ao aprendizado das técnicas operatórias usuais da subtração, valem as mesmas observações feitas para as da adição: a melhor maneira de iniciar este trabalho é partir das estratégias espontâneas dos alunos e de seus registros pessoais.

É possível que os alunos apresentem diferentes algoritmos pessoais, às vezes muito longos, é verdade, para resolverem problemas, como no exemplo:

Se Mário ganhar 15 pontos nesta jogada ele atingirá 32 pontos. Com quantos pontos ele está?

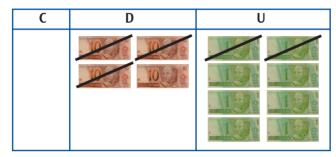


Uma criança que utiliza essa estratégia para registrar o que foi feito, não terá tanto sucesso quando as quantidades forem bem maiores como 723 e 158, por exemplo. Contar esses números de 5 em 5 até 723 e fazer esse tipo de registro com essa quantidade pode levá-lo a enganar-se na contagem e no registro.

Quando os alunos já conhecem o registro desses números no SND e, portanto, já estão familiarizados com agrupamentos e trocas na base 10 é possível iniciar o trabalho com a técnica operatória da subtração, de modo semelhante à da adição, com o acompanhamento das ações realizadas no ábaco.

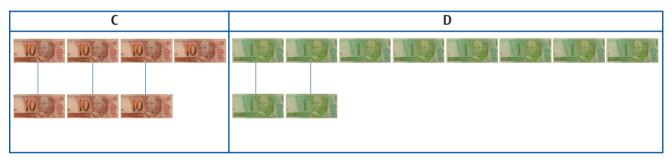
Mesmo no ábaco, é possível usar modos diferentes para efetuar concretamente uma subtração. Por exemplo, no caso em que a resolução de um problema exige do aluno que ele subtraia 32 de 48, é possível agir assim:

#### 1º modo



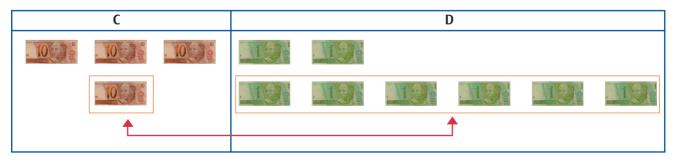
Representamos 48 reais e deles retiramos 32 reais (do 8 tiramos 2 e do 40 tiramos 30) para chegar ao resultado 16.

#### 2º modo



Representamos os dois números e fazemos a correspondência entre unidades e dezenas comparando-os (comparamos 8 com 2 e 40 com 30) para chegar ao resultado 16.

#### 3º modo



Ainda é possível completar o 32 até chegar ao 48 (quanto falta para 2 chegar a 8 e 30 chegar a 50).

De qualquer maneira, o algoritmo correspondente a qualquer um dos 3 modos de considerar a subtração é

48 → minuendo

- 32 → subtraendo

16 → resto, diferença ou complemento

Mesmo quando o minuendo apresenta algum algarismo de valor menor do que seu correspondente no subtraendo, é possível recorrer aos agrupamentos e trocas para justificar a técnica conhecida impropriamente como a de "emprestar" (ou recorrer à unidade de ordem superior), como mostrado a seguir.



# lembrete

"O termo emprestar é bastante inadequado, pois pede-se emprestado, mas não se paga o empréstimo feito. Além disso, o aluno que não compreende bem o processo de agrupamentos e trocas e só faz contas com lápis e papel, sem agir sobre materiais de contagem, não entende porque pede emprestado 1 e recebe 10.

Quando se usa o termo "trocar", no entanto, fica claro que sempre se troca uma nota de dinheiro por outras que, somadas, representam o mesmo valor da primeira."

> Como dois e dois. A construção da matemática Marília Toledo e Mauro Toledo

# INDO À SALA DE AULA



#### O problema

Você tem 6 notas de dez reais e 2 de um real e precisa pagar 38 reais ao caixa do supermercado que não tem troco algum. O que ele deve fazer para dar o troco e de quanto é esse troco?

#### A solução no supermercado

O caixa chama o gerente que troca uma das notas de dez reais que você entregou por 10 notas de um real, ficando com 12 notas de um real e 5 notas de dez reais.

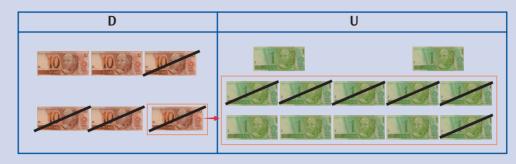
Assim, devolve para o comprador 4 notas de um real e 2 notas de dez reais e guarda 8 notas de um real e 3 de dez reais.



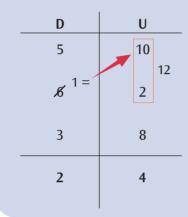


# INDO À SALA DE AULA

### A solução no ábaco



### O algoritmo



# Observações finais

1. Executar as operações da direita para a esquerda é um procedimento convencional (combinado entre as pessoas). Entretanto, quando se calcula mentalmente, em geral, se opera da esquerda para a direita — do algarismo de maior ordem para o de menor ordem. Assim, uma boa estratégia para que os alunos aperfeiçoem a compreensão do que ocorre nos algoritmos é propor a eles que efetuem as operações da esquerda para a direita, como nos exemplos:

2. Há quem faça as subtrações "de baixo para cima" em vez de fazê-la como foi comentado anteriormente (recurso à ordem superior). Esse processo é conhecido como o da "compensação". Ele é baseado numa importante propriedade da

# INDO À SALA DE AULA

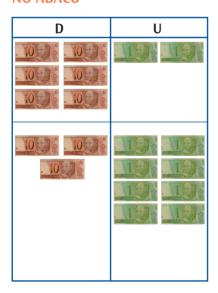


Quanto a tira de Paulo é maior do que a de Carlos?  Diferença	Paulo e Carlos colocam 3 quadrinhos em cada tira. Quanto a tira de Paulo é maior do que a de Carlos?
H	Diferença
Carlos Paulo	Carlos Paulo

Situações como essas levam a criança a perceber que se a cada tira for acrescentado (ou retirado) o mesmo número de quadrinhos a diferença entre os comprimentos da tira não varia.

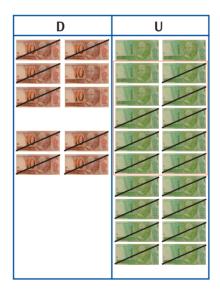
Veja como essa propriedade pode ser aplicada ao cálculo de 62 - 38:

### NO ÁBACO



Se somarmos 10 notas de um real às duas quantias, ficamos com 12 notas de um real e 18 notas de um real o que ainda não nos permite tirar 18 de 12.

Assim, somando 10 notas de um real à primeira quantia e 1 nota de dez reais à segunda temos:



#### **NO ALGORITMO**

Essa estratégia operatória é mais conveniente no caso em que os números apresentam muitos zeros, pois evita os erros cometidos na técnica do "empréstimo".



# Lição de casa

Professor, ao lado você vê um algoritmo utilizado para determinar a soma de 149 com 384.

Registre como você utilizaria um algoritmo como esse para efetuar 384 - 149.

igoritm	o como e	sse para	eretuar	384 - 149

100	+	40	+	9		
300	+	80	+	4		
400 +	- 10	0 + 2	0 +	10	+ 3	
			$\bigvee$	/		
5	00	+	30	)	+	3
_					/	
			<u> </u>			
			533	3		





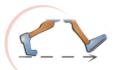
#### INICIANDO NOSSA CONVERSA

Todos nós, professores, temos encontrado crianças e jovens que, embora dominem as regras e fatos relacionados à multiplicação e à divisão com números naturais, encontram grandes dificuldades para decidir "qual operação resolve" um determinado problema.

Mesmo com a calculadora disponível, se não souber definir o que fazer, o aluno não conseguirá resolver o problema.

Assim, a grande preocupação do educador matemático, hoje, é levar o aluno a construir os significados de cada operação, diante das diversas situações em que essas operações podem aparecer.

Isso não significa que as técnicas operatórias usuais serão desprezadas. O trabalho com elas deve ser feito, sempre justificado pelas leis que regem o Sistema de Numeração Decimal, de modo que os estudantes possam compreender cada procedimento realizado.



## **DEFININDO NOSSO PONTO DE CHEGADA**

Ao final desta unidade, esperamos que você tenha refletido sobre as sugestões aqui apresentadas e seja capaz de:

- explicar as diferentes idéias das operações de multiplicação e divisão;
- criar situações didáticas que levem o aluno a reconhecer e utilizar as idéias da multiplicação e divisão na resolução de situação-problema;
- identificar a indissociável relação entre multiplicação e divisão como operações inversas;
- justificar os algoritmos usuais, a partir das regras do Sistema de Numeração Decimal;
- definir diretrizes para uma ação didática que leve os alunos do ensino fundamental a desenvolverem o cálculo com compreensão.



### Seção 1

#### Multiplicação e divisão numa perspectiva de tratamento integrado

Objetivo a ser alcançado nesta seção:

- explicar as diferentes idéias das operações de multiplicação e divisão;
- criar situações didáticas que levem o aluno a reconhecer e a utilizar as idéias das operações de multiplicação e divisão na resolução de situações-problema.

Assim como acontece com a adição e a subtração, há problemas de naturezas diferentes que são resolvidos por uma multiplicação, o mesmo acontecendo com a divisão.

#### A multiplicação como adição de parcelas iguais

No caso da **multiplicação**, os problemas tradicionalmente conhecidos e trabalhados nas escolas são aqueles em que aparecem quase exclusivamente a idéia de que multiplicar é o mesmo que somar parcelas iguais. Nos problemas esse procedimento é traduzido pela formação de grupos com quantidades iguais de elementos. Vamos analisar esse caso em primeiro lugar.

Nesse tipo de situação, há duas grandezas de naturezas diferentes relacionadas e o resultado que se busca é da mesma natureza de uma delas. Veja como isso acontece.

Dona Jurema fez três bolos com a mesma receita. Em cada bolo, ela colocou 5 ovos. Quantos ovos usou nesses bolos?

As grandezas aqui envolvidas são: "a quantidade de bolos" e a "quantidade de ovos"; o resultado esperado se refere à "quantidade total de ovos".

Muitos alunos, no início de sua aprendizagem, tentam resolver o problema, simplesmente somando as quantidades indicadas no enunciado, sem se darem conta de que "3" e "5" referem-se a quantidades de elementos de **naturezas diferentes** e, portanto, não podem ser somados. Essa dificuldade é facilmente sanada, se lhes pedirmos que representem a situação, usando material concreto, uma figura ou um esquema.







ou 1<sup>a</sup> receita 5 ovos

2ª receita 5 ovos

3ª receita 5 ovos

Total 5+5+5=15 ovos



# lembrete

Chamamos de grandeza tudo o que pode ser contado ou medido.

Exemplos de grandezas.

- População de uma região.
- Preço de venda de um objeto.
- Quantidade de ovos para fazer um bolo.
- Comprimento de uma estrada.
- Força exercida para abrir uma porta.
- Pressão atmosférica.
- Velocidade de um caminhão.
- Quantidade de bolos feitos.

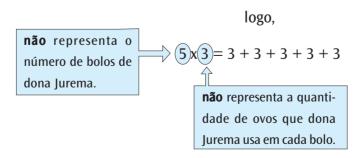
Essas grandezas não são da mesma espécie, pois não se referem à mesma coisa contada ou medida.

Com essas representações, fica claro para a criança que a situação é resolvida a partir de uma adição de parcelas iguais, cabendo ao professor introduzir a escrita multiplicativa equivalente à escrita aditiva já conhecidas por eles:  $5 + 5 + 5 = 3 \times 5$  ou 3 grupos de 5 ovos. Nessa escrita, o 3 faz o papel de "operador", pois indica "quantos grupos de 5 unidades estão sendo somados".

Os alunos passam a ver, então, a escrita multiplicativa como "um modo mais econômico" de representar uma adição com muitas parcelas iguais.

Deve-se observar que a escrita "5 x 3", indicando que "5 grupos de 3 unidades estão sendo somados", não é adequada para representar a situação dada (embora o resultado da operação seja o mesmo), pois

5 x 3 significa "5 vezes o número 3",



Teoria e Prática 3 • Unidade

Portanto, o modo de fazer essa multiplicação não representa a quantidade de ovos dos bolos de dona Jurema.

Precisa ficar claro para a criança que ela poderia representar os ovos utilizados daquela forma se fosse dada uma nova receita de bolo em que cada um necessitasse de 3 ovos e o número de bolos a serem feitos fosse 5. Só nesse caso, estaria correta a representação abaixo.













Professor, crie um enunciado para um problema que seja resolvido com  $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ , isto é, em que o 5 faz o papel do "operador".

Discutindo, analisando e resolvendo situações como essas em que um mesmo número, ora faz o papel do operador (é o caso do 3 no problema dos bolos de dona Jurema), ora faz o papel da parcela que se repete (é o caso do 3 no problema que você inventou), o aluno vai construindo a idéia da multiplicação como adição de parcelas iguais e, ao mesmo tempo, vai se familiarizando com os fatos fundamentais da multiplicação.

Assim, quando a criança compreende a idéia da multiplicação e o que uma escrita multiplicativa representa, ela pode aplicar esse conhecimento para encontrar resultados desconhecidos de multiplicação, a partir de resultados que ela já conhece. 6 x 8? EU NÃO SEI...

AH! SÃO 6 GRUPOS DE 8.

EU SEI QUE 5 x 8 = 40.

ENTÃO FALTA SÓ MAIS UM GRUPO DE 8

40 + 8 = 48

#### A multiplicação e o aspecto combinatório

Os "problemas de contagem" representam um segundo tipo de situação que também é resolvida por meio de uma multiplicação. Veja só.

Com 2 tipos de caretas e 4 tipos de chapéus, quantos palhacinhos diferentes você pode formar?

As grandezas aqui envolvidas são "quantidade de tipos de caretas" e "quantidade de tipos de chapéus"; e o resultado que se busca, não são "caretas", nem "chapéus",

mas "palhacinhos" (combinando careta e chapéu). Portanto, aqui estamos relacionando duas grandezas de naturezas diferentes e a solução procurada é de uma outra natureza, diferente das anteriores.

O aluno estará raciocinando combinatoriamente quando formar todos os agrupamentos possíveis em que cada um deles tenha uma careta e um chapéu.

Naturalmente, os alunos das séries iniciais só têm condições de resolver esse problema na **ação**, ou seja, experimentando combinar as caretas e os chapéus, obtendo alguns agrupamentos possíveis, inicialmente sem a preocupação de esgotar todas as possibilidades.

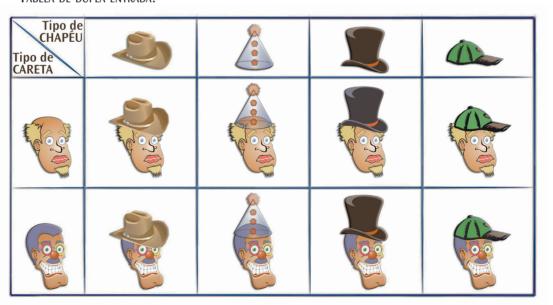
As primeiras experiências com esse tipo de problemas servem apenas como familiarização com o tema, não sendo possível esperar que as crianças se conscientizem do raciocínio combinatório aí envolvido.

Para que o trabalho de manipulação possa ser feito de modo mais fácil pelas crianças, é necessário que cada grupo de alunos tenha uma quantidade adequada de caretas de cada tipo, assim como de chapéus de cada tipo (no caso, sabemos que eles vão usar cada tipo de careta 4 vezes, assim como irão usar 2 vezes cada tipo de chapéu. Então, podemos providenciar, para cada grupo, uns 5 caretas de cada tipo e uns 3 chapéus de cada tipo).

Para alunos de 3º ou 4º anos, depois de resolvido o problema, por manipulação de material concreto e já com a preocupação de esgotar todas as possibilidades de combinar caretas com chapéus, deve-se observar se eles já estão dando certa organização a seus desenhos. Nesse momento, é possível oferecer representações do que foi feito, o que permite a organização do trabalho, evitando que algumas das soluções fiquem esquecidas ou mesmo repetidas.

As representações usuais são: a tabela de dupla entrada e o diagrama de árvore.

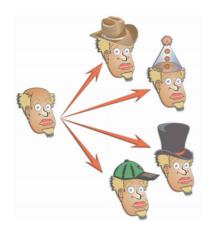
#### TABELA DE DUPLA ENTRADA:

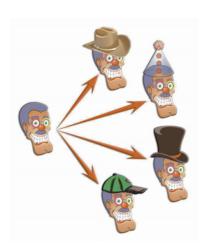


Nesse caso, não há dificuldades, pois em geral os alunos já estão familiarizados com o uso de tabelas para a organização de dados.

O diagrama de árvore também é muito útil para nos dar uma visão geral da arrumação feita com o material.

#### DIAGRAMA DE ÁRVORE:





Analisando qualquer uma das representações, os alunos descobrem que o total de elementos procurados pode ser encontrado por meio de uma multiplicação. Para seu conhecimento (e não de seu aluno), veja a tabela a seguir:

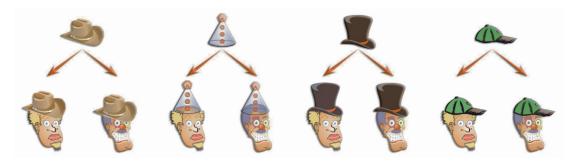
Grandezas	Quantidade de tipos de caretas	Quantidade de tipos de chapéus
Variações das grandezas	2	4

Total de palhacinhos  $2 \times 4 = 8$  ou  $4 \times 2 = 8$ 

Como se pode perceber, nas situações dos problemas de contagem, os números que indicam os totais de elementos de cada tipo de grandeza têm o mesmo papel, na multiplicação, podendo qualquer um deles aparecer como "operador" na multiplicação:

- 2 x 4 ("são 2 caretas; na 1ª eu posso colocar 4 tipos de chapéus, obtendo 4 palhacinhos. Faço o mesmo com a outra careta e obtenho outros 4 palhacinhos"); a árvore de possibilidades acima representa essa situação;
- 4 x 2 ("são 4 tipos de chapéus; eu coloco o 1º tipo em cada uma das 2 caretas, obtendo 2 palhacinhos; faço o mesmo com o 2º tipo de chapéu, obtendo outros 2 palhacinhos; repito isso para o 3º e depois para o 4º chapéu, obtendo outros 2 palhacinhos para cada tipo de chapéu").

Uma árvore de possibilidades que representa esta outra situação é





Abaixo, você encontra dois problemas de caráter multiplicativo.

Identifique qual deles está associado ao aspecto combinatório e qual está associado à idéia de que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais.

- 1. Jogo ao mesmo tempo dois dados: um branco e outro vermelho. De quantas maneiras posso obter pontos no dado branco e no dado vermelho?
- 2. Paulo empilhou todos os seus livros. Em cada uma das 12 pilhas montadas, pôs 7 livros. Quantos livros tem Paulo?

xplique por que você fez essa associação.						

# Atividade 3

Faça em seu caderno o diagrama de árvore ou a tabela de dupla entrada, em cada caso abaixo, para planejar as quantidades de materiais a serem providenciadas por você para que seus alunos realizem as atividades propostas.

- Com figuras de 3 modelos de veículos e lápis de 3 cores, quantos veículos diferentes pode-se obter, colorindo cada um deles de uma só cor?
- Usando figuras de 2 tipos de bermudas e de 3 tipos de camisetas, quantos bonequinhos vestidos com 1 tipo de camiseta e 1 tipo de bermuda de modos diferentes iremos obter?

	Embrulhando 2 tipos de caixinhas (de fósforos e de creme dental, por exemplo					
	com 4 tipos de papel de presente, quantos diferentes pacotes poderemos fa se cada pacote deve ser feito com uma caixinha e um tipo de papel?					
3	e cada pacote deve ser feito com uma caixinna e um "tipo de papei?					
-						
_						
-						
_						
_						
_						

#### A multiplicação e a configuração retangular

A organização espacial dos elementos sob forma de uma superfície retangular é outra situação importante ligada à multiplicação. Veja o exemplo.

O muro de entrada da casa do senhor Altair foi ladrilhado com lajotas como na figura. Quantas lajotas foram utilizadas?

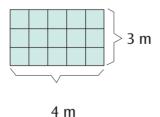


Para descobrir o total de lajotas utilizadas, sem ter que contar uma a uma, pode-se pensar que são "5 fileiras de 3 lajotas cada" (5 x 3) ou "3 fileiras de 5 lajotas cada" (3 x 5). Assim, qualquer uma das escritas multiplicativas pode ser usada para descrever a situação, podendo-se considerar o 5 ou o 3 como "operador".

Novamente, a manipulação de material como fichas recortadas em cartolina, tampinhas, sementes etc, é bastante desejável para que os alunos estabeleçam um modo de contar os elementos por linha ou por coluna, quando eles estão organizados sob forma retangular. Outro material muito prático, nesse caso, é o papel quadriculado (de preferência, o de 1 cm x 1 cm).

Estimular os alunos a organizarem os elementos de uma coleção é de fundamental importância para que, por volta da 5ª série, os estudantes possam construir o significado da fórmula da área de uma superfície retangular. Por exemplo:





$$A = b x h$$

$$A = 4 \text{ m x 3 m}$$

$$A = 12 \text{ m}^2$$



Professor, pesquise em livros didáticos ou crie situações-problema que envolvam a idéia multiplicativa, de forma que seus alunos sejam solicitados a usar:

a)	formação de grupos com quantidades iguais de elementos.
b)	raciocínio combinatório.
c)	organização espacial dos elementos em forma retangular.

#### A divisão

A **divisão** está intimamente relacionada à multiplicação, surgindo como sua operação inversa, nas situações-problema.

Os problemas que envolvem divisão de números naturais sempre se referem a uma coleção de elementos organizados em uma certa quantidade de grupos, sendo que cada grupo possui a mesma quantidade de elementos.

Nesse cenário (que é multiplicativo) é possível encontrar problemas que podem ser resolvidos com uma divisão, porém as idéias que lhes dão suporte podem ser muito diferentes. Em cada um dos problemas seguintes você vai encontrar uma idéia diferente de divisão.

#### PROBLEMA 1

Dona Jurema fez 3 bolos iguais, gastando ao todo 15 ovos. Quantos ovos são necessários para cada bolo?

Aqui procuramos o total de elementos de cada grupo (quantidade de ovos de cada bolo).

Temos uma situação em que um total é **repartido igualmente** em vários grupos.

#### $P_{\text{ROBLEMA}} \; 2$

Dona Jurema tem 15 ovos e vai fazer bolos que gastam 5 ovos cada um. Quantos bolos Dona Jurema poderá fazer?

Neste caso procuramos a quantidade de grupos que serão formados (quantidade de bolos). Temos uma situação ligada à idéia de **medir** (quantas vezes o número de elementos de cada grupo cabe no total).

Teoria e Prática 3 · Unidade 2

Esses dois problemas decorrem do problema dos "bolos de Dona Jurema" (3 x 5 = 15) e estão relacionados à divisão.

#### Voltando ao problema 1:

Dona Jurema fez 3 bolos iguais, gastando ao todo 15 ovos. Quantos ovos são necessários para cada bolo?

Nesse caso, temos a quantidade de grupos formados (o "operador" 3) faltando o total de elementos de cada grupo.



Observamos que no dividendo estão 15 ovos e o resultado encontrado são 5 ovos para cada grupo, ou seja, no dividendo e no resultado aparecem **grandezas de mesma espécie** (número de ovos).

Para resolver essa situação, manipulando material concreto, a criança age de maneira intuitiva: sabendo que são 3 bolos, vai colocando <u>1 ovo para cada bolo</u>, até se esgotarem os ovos. Só então, descobre que cada bolo precisará de 5 ovos. A ação que ela realizou foi "repartir igualmente os 15 ovos em 3 grupos".



Vejamos, agora, o que acontece no problema 2.

Dona Jurema tem 15 ovos e vai fazer bolos que gastam 5 ovos cada um. Quantos bolos Dona Jurema poderá fazer?

Nessa situação, o que se conhece é a quantidade de elementos de cada grupo sendo necessário descobrir quantos são os grupos formados (o "operador").



Nessa situação o dividendo é representado por 15 ovos, enquanto encontramos como resultado 3 bolos, ou seja, no dividendo e no resultado aparecem grandezas de **naturezas diferentes** (número de ovos, número de bolos). Nesse exemplo, o dividendo e o divisor apresentam grandezas de mesma natureza.

Para resolver essa situação manipulando material concreto, a criança precisa ir fazendo grupos de 5 ovos, até se esgotarem todos. Só então, ela verifica quantos grupos de 5 ovos foram formados. A ação da criança, agora, foi descobrir "quantos grupos de 5 ovos cabem em 15 ovos", ou seja, ela está **medindo** os 15 ovos, tendo como unidade de medida os 5 ovos.



# lembrete

Medir significa comparar uma grandeza qualquer com outra **de mesma espécie**, considerada como unidade. Por exemplo, ao medirmos um comprimento usando como unidade de medida o comprimento de 1 metro, estamos verificando "quantas vezes o comprimento de 1 metro cabe no comprimento desconhecido".



A partir do problema escolhido por você para responder à questão **a)** da Atividade 4 (formar grupos com quantidades iguais de elementos), crie duas situações de divisão:

om a idéi	ia de "repartir iş	gualmente".		
om a idéi	a de "medir".			

Na situação em que foi usado o raciocínio combinatório, vimos que os dois termos da multiplicação têm o mesmo papel, sendo que qualquer um deles pode funcionar como "operador". Assim, esses problemas dão origem a duas divisões do mesmo tipo: "repartir igualmente", pois sempre se sabe o total de grupos a serem formados.

Vejamos o que acontece com a situação dos palhacinhos:

a) É possível considerar 2 caretas x 4 tipos de chapéus = 8 palhacinhos e criar a situação de divisão:

Elba formou 8 palhacinhos diferentes, usando 2 tipos de caretas diferentes e variando os tipos de chapéus que colocou em cada uma. Quantos tipos de chapéus ela usou?

8 palhacinhos 2 tipos de caretas
0 4 tipos de chapéus

b) Podemos também considerar 4 tipos de chapéus x 2 caretas = 8 palhacinhos. A situação de divisão aqui será:

Elba formou 8 palhacinhos diferentes, usando 4 tipos diferentes de chapéus e colocando esses chapéus em tipos diferentes de caretas. Quantos tipos de caretas ela usou?

8 palhacinhos 4 tipos de chapéus
0 2 tipos de caretas

No caso da organização dos elementos em forma retangular, também acontece o mesmo: tanto nas linhas quanto nas colunas formadas, há o mesmo tipo de grandeza. Então qualquer um desses totais pode ter o papel de "operador". As divisões relacionadas à situação referem-se a "repartir igualmente", pois sempre se tem o total de grupos a serem formados.

Voltemos ao exemplo da casa do senhor Altair (logo depois da atividade 3).

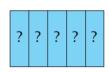
a) Consideremos a situação representada por 3 x 5 = 15. Daí, surge a situação de divisão:

?		?	
	?		?
?		?	

Para ladrilhar a entrada de sua casa, o senhor Altair fez 3 fileiras com quantidades iguais de lajotas, usando ao todo 15 lajotas. Quantas ele colocou em cada fileira?

15 lajotas 3 fileiras
0 5 lajotas por fileira

b) Da situação representada por 5 x 3 = 15, temos a situação de divisão:



O senhor Altair gastou 15 lajotas para ladrilhar a entrada de sua casa, fazendo 5 fileiras de lajotas, com a mesma quantidade por fileira. Quantas lajotas ele colocou em cada fileira?

15 fileiras3 lajotas por fileira.



Professor, na atividade 4 você respondeu às perguntas **b**) e **c**) com situações que envolvem a idéia multiplicativa combinatória e a idéia multiplicativa ligada à configuração retangular.

A partir de cada uma dessas situa	ições, crie uma situação-problema que possa sei
resolvida com uma divisão, como foi	feito com os problemas dos palhacinhos e o das
lajotas do senhor Altair.	



Nesta seção, refletimos sobre:

- 1. o fato de que tanto a multiplicação quanto a divisão relacionam-se a situações em que se formam grupos com quantidades iguais de elementos;
- 2. as situações-problema resolvidas pela multiplicação;
- 3. as que são resolvidas pela divisão.

A multiplicação está relacionada a situações de:

- adição de parcelas iguais, em que estão envolvidos 2 tipos de grandezas e o resultado é da mesma natureza que uma delas;
- problemas de contagem, em que 2 tipos de grandezas são combinados, para formar um 3º tipo de grandeza; nesse caso, o raciocínio combinatório nos permite organizar os elementos de todos os modos possíveis, para obtermos os resultados;
- problemas em que se trabalha com os elementos de uma dada grandeza, organizando-os sob forma de uma superfície retangular, em linhas e colunas.

A divisão está diretamente relacionada com a multiplicação e, assim, as situações que ela resolve são as de:

- repartir igualmente, em que um total de elementos deve ser separado em um total dado de grupos, sendo necessário descobrir a quantidade de elementos que ficará em cada grupo;
- medir, em que um total de elementos deve ser separado em grupos com uma quantidade dada de elementos, sendo necessário descobrir quantos grupos serão formados.



# Seção 2

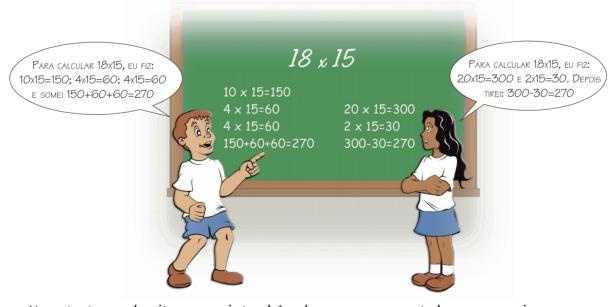
# Multiplicação e divisão: desenvolvimento do cálculo

Objetivos a serem alcançados nesta seção:

- identificar a indissociável relação entre multiplicação e divisão como operações inversas;
- identificar os algoritmos usuais a partir das regras do Sistema de Numeração Decimal;
- definir diretrizes para uma ação didática que leve os alunos do ensino fundamental a desenvolverem um cálculo com compreensão.

No que se refere ao desenvolvimento do cálculo, devemos ter sempre presente a necessidade de se respeitarem os procedimentos próprios de cada aluno.

É bastante produtivo que o professor ofereça condições para que alguns alunos expliquem aos colegas como chegaram a um dado resultado. Comparando soluções encontradas, a classe toda vai ampliando seu repertório a respeito de estratégias de cálculo.



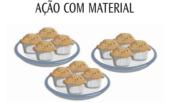
No entanto, os algoritmos usuais também devem ser apresentados, como mais um modo de fazer os cálculos, em especial, favorecendo estratégias de cálculo mental. Assim, do mesmo modo que foi discutido para adição e a subtração, as técnicas operatórias usuais da multiplicação e divisão também devem ser apresentadas e justificadas a partir dos agrupamentos e trocas na base 10 e do valor posicional dos algarismos — as regras fundamentais do Sistema de Numeração Decimal.

Desse modo, os alunos se conscientizam de que cada procedimento utilizado tem uma justificativa e nenhuma regra deve ser memorizada, sem que tenha uma explicação lógica.

#### A multiplicação

A construção dos fatos fundamentais da multiplicação (tabuadas) deve ser feita com a manipulação de material concreto (tampinhas, palitos, grãos de cereais etc), ou de papel quadriculado, sempre relacionados a alguma situação-problema e fazendo-se o registro das ações realizadas. Por exemplo:

Dona Jurema arrumou 3 pratos, colocando 4 bolinhos em cada um. Quantos bolinhos ela usou?



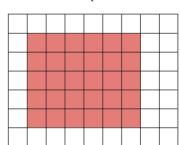
REGISTRO

 $3 \times 4 = 12$ 

DESENHO NO PAPEL QUADRICULADO

REGISTRO

Seu Januário está construindo uma parede em sua casa. Ele está colocando 6 tijolos em cada fileira. Já fez 5 fileiras. Quantos tijolos ele já gastou?



5 x 6 = 30

É desejável que haja memorização dos produtos básicos, mas isso pode ser feito de maneira gradativa e tranquila, por meio de jogos e atividades de cálculo mental, evitando-se que as crianças sejam obrigadas a decorar listas de tabuadas, sem saberem para que servem ou como foram organizadas.



F	Professor, agora é a sua vez. Crie um joguinho como "bingo" ou como	"dominó"
ıtili	izando resultados retirados das tabuadas de multiplicação.	

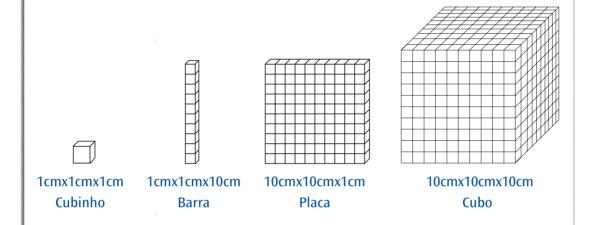
É muito importante que, ao iniciar o trabalho com as técnicas operatórias (multiplicação de um número menor que 10 por outro maior que 10), os alunos possam manipular algum tipo de material construído de modo a representar os agrupamentos e trocas na base 10 (um ábaco), fazendo no caderno o registro das ações que forem realizadas com o material (o algoritmo). Veja como isso pode ser feito no lembrete seguinte.



# lembrete

O material pode ser de vários tipos, como:

- "Dinheiro", feito em papel ofício, com "notas" de 1, 10, 100 e 1000 "reais" que os alunos podem colorir e recortar.
- Fichas coloridas, em que cada cor de ficha representa um valor (1, 10, 100, 1000).
- Material Dourado, construído de peças de madeira, apresentadas em 4 tipos: cubinho, barra, placa e cubo:



A vantagem do uso desse material é que as crianças visualizam os valores das peças, por correspondência com seus tamanhos e formatos, além de poderem conferir resultados por contagem. Assim, elas observam que:

- 1 barra pode ser formada por 10 cubinhos;
- 1 placa, por 10 barras (ou 100 cubinhos);
- 1 cubo, por 10 placas (ou 100 barras, ou, ainda, 1000 cubinhos).

Tanto no caso do "dinheiro", quanto no do Material Dourado, é conveniente que os alunos organizem as peças sobre uma folha de papel ofício, dobrada em 4 partes iguais, onde são marcados os lugares em que devem ficar essas peças: da direita para a esquerda, em ordem crescente - unidade, dezena, centena, unidade de milhar.

Desse modo, ao observar o material para fazer o registro no caderno, o aluno começa a compreender o valor posicional dos algarismos.

U.M.	С	D	U

A manipulação de qualquer um desses materiais permite aos alunos, com o auxílio/ mediação do professor, visualizarem a **propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição**, propriedade fundamental no processo utilizado para a multiplicação. Por exemplo, 3 x 12:

#### . . .

NO ÁBACO

#### Uma penca tem 3 dúzias de bananas. Quantas frutas são?

UM	C	D	U
			0 0
			0 0
			0 0

#### **REGISTRO (ALGORITMO)**

$$12 = 10 + 2$$

$$12 = 10 + 2$$

$$12 = 10 + 2$$

$$3 de 10 + 3 de 2$$

$$30 + 6$$

$$36$$



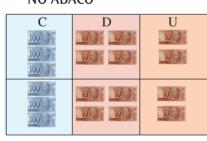
# lembrete

Pode-se observar que as doze unidades estão representadas como "1 dezena + 2 unidades" e que o operador 3 foi **distribuído** para estas duas parcelas: (3 x 1 dezena) e (3 x 2 unidades), produzindo como resultado 3 dezenas e 6 unidades, ou 36 unidades.

Outro exemplo: 2 x 342:

O pai de Pedro foi pagar 2 prestações da casa deles. Cada prestação é de 342 reais. Quanto ele gastou?

#### NO ÁBACO

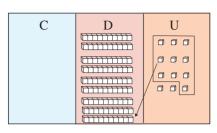


#### REGISTRO (ALGORITMO)

O mesmo tipo de trabalho será realizado nos casos em que há "reserva". Vejamos, por exemplo, 4 x 26:

A escola de Naná tem 4 classes de pré-escola. Cada classe tem 23 alunos. Quantos alunos há, ao todo, na pré-escola?

NO ÁBACO



#### **REGISTRO (ALGORITMO)**

$$23 = 20 + 3 
23 = 20 + 3 
23 = 20 + 3$$

$$23 = 20 + 3$$

$$4 de 20 + 4 de 3$$

$$80 + 12$$

$$80 + 10 + 2$$

$$90 + 2$$

$$92$$



Faça um pequeno comentário, comparando o modo como você aprendeu a multiplicar com o modo aqui sugerido.

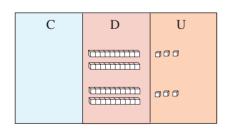
No caso da multiplicação de dois números maiores que 10, temos uma "dupla distributiva". Por exemplo, 12 x 23:

> Claudemir trabalha na feira 23 dias em cada mês. Assim, quantos dias ele terá que trabalhar em 1 ano?

Vamos fazer este trabalho por partes. Temos que calcular 12 vezes a quantidade 23. Podemos calcular separadamente 2x23 e 10x23. Juntando teremos 12x23. Vamos começar fazendo 2 UNIDADES x 23

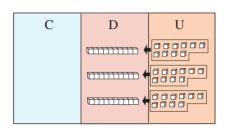
NO ÁBACO

**REGISTRO (ALGORITMO)** 

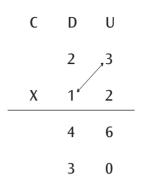


A seguir, devemos multiplicar 1 DEZENA por 23. Ao indicar 1 x 3, devemos nos lembrar que estamos multiplicando 1 DEZENA por 3 unidades, ou seja,10x3, isto é, 10 grupos de 3 unidades, o que dá 30 unidades, ou 3 DEZENAS e ZERO unidades.

#### NO ÁBACO



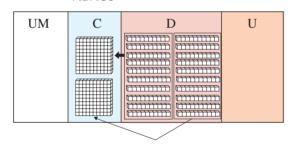
#### **REGISTRO (ALGORITMO)**



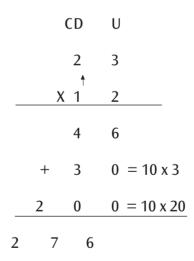
É por esse motivo que sempre aparece uma "casinha vazia" no lugar das unidades. Certamente, quando se começou a trabalhar com esse processo, o <u>zero</u> era colocado no lugar das unidades. Com o tempo, por simplificação, passou-se a deixar o lugar do zero vazio. Assim, é importante que o zero seja sempre colocado na ordem das unidades, no início da aprendizagem, para que a "casinha vazia" não se transforme num mistério para os alunos.

A seguir, ao multiplicar 1 DEZENA por 2 DEZENAS, temos 10 grupos de 2 DEZENAS, que é igual a 20 DEZENAS ou 2 CENTENAS; esse resultado será colocado na coluna das centenas.

#### ÁBACO



#### REGISTRO (ALGORITMO)





Professor, como você analisa o erro cometido por um aluno na seguinte situação: "calculando o resultado de 3 x 34, o resultado encontrado foi 122"?

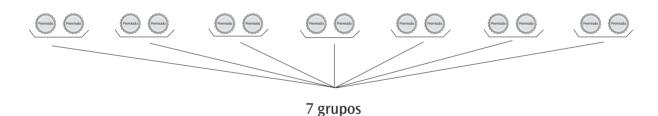
#### A divisão

O trabalho com a divisão deve ser iniciado juntamente com a multiplicação, de modo que os alunos construam, aos poucos, os fatos básicos da divisão, relacionados aos da multiplicação. As atividades devem sempre ter o apoio de material de manipulação e devem ser exploradas as situações de "repartir igualmente" e de "medir". O professor deve incentivar o registro da ação realizada por meio de uma escrita. Por exemplo:

Repartindo igualmente 18 lápis por 3 crianças, quantos lápis cada criança vai receber? (Registro 18 : 3 = 6)

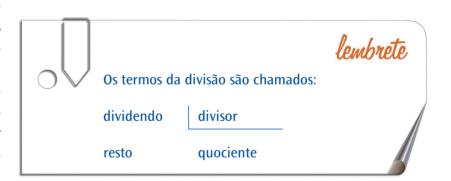
Ou

Com 14 tampinhas, quantos grupos de 2 tampinhas você



A segunda fase do trabalho deve ser realizada com as divisões em que o dividendo não é múltiplo do divisor. Certamente, não há necessidade de informar aos alunos, nesta fase, os nomes dos termos da divisão, nem trabalhar formalmente o conceito de "múltiplo de um número".

pode organizar?



(Registro 14:2=7)

A partir de experiências com material de manipulação, eles irão descobrindo a relação entre o dividendo e o resto. Perceberão que o resto é sempre menor que o dividendo: quando não o for, isso significa que a partilha ainda não está completa e pode ser prosseguida. Por exemplo, na situação:

#### Repartir igualmente 20 lápis por 6 crianças.

Os alunos poderão ir preenchendo uma tabela, como mostrado no exemplo abaixo.

QUANTIDADE DE LÁPIS —	TOTAL DE LÁPIS —	TOTAL DE LÁPIS —	PODEMOS DAR MAIS 1
PARA CADA CRIANÇA	REPARTIDOS	QUE SOBRAM	LÁPIS PARA CADA CRIANÇA?
1	$6 \times 1 = 6$	20 - 6 = 14	Sim
2	6 x 2 = 12	20 - 12 = 8	Sim
3	6 x 3 = 18	20 - 18 = 2	Não

Essa situação será representada pela escrita  $20 = 6 \times 3 + 2$ .

Do mesmo modo, podem ser exploradas as situações de "medir", como:

Com 19 fichas, quantos grupos de 4 fichas podemos formar?

Uma nova tabela poderá ser organizada pelos alunos.

QUANTIDADE DE LÁPIS	TOTAL DE LÁPIS	TOTAL DE LÁPIS	PODEMOS DAR MAIS 1
PARA CADA CRIANÇA	REPARTIDOS	QUE SOBRAM	LÁPIS PARA CADA CRIANÇA?
1	$1 \times 4 = 4$	19 - 4 = 15	Sim
2	$2 \times 4 = 8$	19 - 8 = 11	Sim
3	3 x 4 = 12	19 - 12 = 7	Sim
4	4 x 4 = 16	19 - 16 = 3	Não

Essa situação será representada pela escrita  $19 = 4 \times 4 + 3$ .

#### O processo americano de divisão

Aproveitando esse tipo de atividade, pode-se apresentar o processo de divisão, conhecido como "processo americano", em que não se trabalha com a propriedade distributiva da divisão em relação à adição (separando o dividendo em suas diversas ordens). A divisão feita por subtrações sucessivas estimula a habilidade de fazer estimativas. Vejamos um exemplo:

Ronaldo quer repartir igualmente 23 figurinhas entre seus 5 irmãos. Qual é a maior quantidade de figurinhas que cada um pode receber?

Teoria e Prática 3 · Unidade 2

Distribuindo as fichas de 1 em 1, em cada rodada de distribuição e preenchendo uma tabela como a apresentada a seguir, os alunos poderão compreender o registro utilizado:

**TABELA** 

RODADA_	TOTAL DE FIGURINHAS	TOTAL DE FIGURINHAS	TOTAL DE FIGURINHAS
	QUE CADA IRMÃO RECEBE	GASTAS	QUE SOBRARAM
1 <sup>a</sup>	1	5	18
2 <sup>a</sup>	1	5	13
3 <sup>a</sup>	1	5	8
4 <sup>a</sup>	1	5	3

Cada irmão recebe (1 + 1 + 1 + 1) 4 fichas e sobram 3.

#### **REGISTRO (ALGORITMO)**

Aos poucos, os alunos percebem que podem distribuir mais de uma ficha em cada jogada, fazendo a distribuição mais rapidamente. Aí é que começam a fazer cálculos mentais e estimativas, inclusive lançando mão de habilidades desenvolvidas na multiplicação. Vejamos alguns exemplos.

Um aluno pode pensar em começar dando 2 figurinhas para cada irmão, observando quantas sobram para a próxima rodada como mostrado na tabela abaixo.

#### **TABELA**

RODADA	TOTAL DE FIGURINHAS TOTAL DE FIGURINHAS		TOTAL DE FIGURINHAS
	QUE CADA IRMÃO RECEBE	GASTAS	QUE SOBRARAM
1 <sup>a</sup>	2	10	13
2 <sup>a</sup>	2	10	3

REGISTRO (ALGORITMO)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 23 & & 5 \\
 \hline
 & -10 & & 2 \\
 \hline
 & -10 & & 2
\end{array}$$

Cada irmão recebe (2 + 2) 4 figurinhas e sobram 3.

Um outro aluno pode saber de cor que  $3 \times 5 = 15$  e iniciar a distribuição dando 3 figurinhas para cada irmão:

**TABELA** 

RODADA	TOTAL DE FIGURINHAS	TOTAL DE FIGURINHAS	
	QUE CADA IRMÃO RECEBE	GASTAS	QUE SOBRARAM
1 <sup>a</sup>	3	15	8
2 <sup>a</sup>	1	5	3

Cada irmão recebe (3 + 1) 4 figurinhas e sobram 3.

#### REGISTRO (ALGORITMO)

Se um aluno já sabe que  $4 \times 5 = 20$ , ele resolve a questão com apenas uma rodada de distribuição:

**TABELA** 

TOTAL DE FIGURINHAS	TOTAL DE FIGURINHAS	TOTAL DE FIGURINHAS
QUE CADA IRMÃO RECEBE	GASTAS	QUE SOBRARAM
1	20	2

**REGISTRO (ALGORITMO)** 

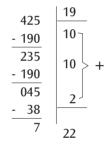
Cada irmão recebe 4 figurinhas e sobram 3.

Observe que o "processo americano" pode ser usado também quando o divisor é maior que 10. Por exemplo, para repartir igualmente 425 fichas por 19 crianças, em geral os alunos logo percebem que é muito fácil fazer multiplicações por 10 (ou múltiplos de 10), começando a distribuição por grupos de 10 fichas para cada criança:

**TABELA** 

REGISTRO (ALGORITMO)

RODADA	TOTAL DE FIGURINHAS TOTAL DE FIGURINH <u>AS</u>		TOTAL DE FIGURINHAS	
	QUE CADA IRMÃO RECEBE	GASTAS	QUE SOBRARAM	
1 <sup>a</sup>	10	19x10=190	425 - 190 = 235	
2 <sup>a</sup>	10	19x10=190	235 - 190 = 45	
3 <sup>a</sup>	2	19x2=38	45 - 38 = 7	



Cada criança recebe (10 + 10 + 2) = 22 fichas e sobram 7



Agora é a sua vez. Use o "processo americano" para calcular 854 : 25						

#### O processo euclidiano de divisão

Vimos que, procurando as diversas maneiras de fazer a distribuição mais rapidamente, os alunos geralmente acabam por chegar a processos próximos àqueles que normalmente utilizamos: o que é conhecido como "processo euclidiano". Por esse processo não se pode experimentar possíveis formas de distribuição, mas já se procura a **maior quantidade** possível de elementos a serem distribuídos para se formar um

total igual ou menor que a quantidade de elementos a serem distribuídos, como foi feito no último exemplo.

Vemos que, para efetuar divisões pelo processo euclidiano, será útil que os alunos tenham memorizado as tabuadas, pois assim não ficarão experimentando diversos valores e corrigindo erros, mas colocarão o **maior** valor possível que, multiplicado pelo divisor, não ultrapasse o dividendo.

Quando o dividendo é um número que ultrapassa 10 vezes o divisor, somente a tabuada não dá o resultado esperado, sendo necessário fazer a divisão por etapas. É aí que começam as dificuldades...

Todos nós, professores, sabemos que das operações com números naturais aquela que traz as maiores dificuldades de cálculo é a divisão (pelo processo euclidiano, seja ele o "breve" ou o "longo"). Em geral, isso acontece porque as regras são passadas aos alunos, sem que eles tenham oportunidade de usar material de manipulação, de maneira que não conseguem perceber o processo de agrupamentos e trocas, na base 10, presente em tais regras.

Assim, o trabalho em sala de aula deve ser feito sempre apoiado em material concreto (fichas, "dinheiro", Material Dourado, cartaz, valor de lugar etc), sendo que as ações realizadas com o material devem ser registradas no caderno. Vejamos alguns exemplos desse trabalho.

Para dividir, por exemplo, 248 por 2, utilizando o dinheiro:

#### ÁBACO

# UM C D U

#### **REGISTRO (ALGORITMO)**

Ao representar 248 reais com 2 notas de 100 reais, 4 notas de 10 e 8 notas de 1, intuitivamente os alunos dividem a quantidade de cada tipo de "notas" por 2, ou seja, levam em conta que a divisão se distribui em relação à adição do lado direito, propriedade fundamental para esse processo de divisão:

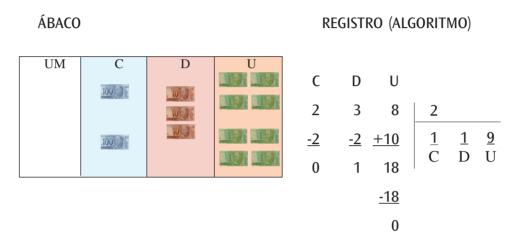
$$248U : 2 = (2C + 4D + 8U) : 2 = (2C : 2) + (4D : 2) + (8U : 2) = 1C + 2D + 4U = 124U$$

#### **OBSERVAÇÃO**

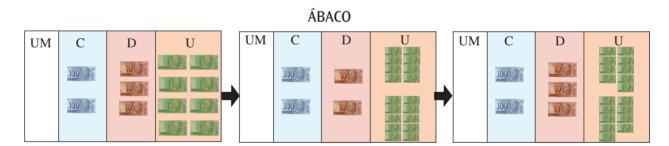
Professor, lembre-se de que esse tipo de explicação é destinada a você e não aos alunos.

Observe-se que, ao fazer o registro das ações realizadas, é importante indicar as ordens que estão sendo procuradas no quociente. Esse procedimento irá evitar uma série de erros, no futuro, especialmente nos casos em que um dos algarismos do quociente seja zero.

Nesse primeiro exemplo, deliberadamente, foi escolhido um número para o dividendo (248) em que todos os algarismos são múltiplos do divisor (2). Vejamos o que acontece se um dos algarismos não for múltiplo do divisor. Seja, por exemplo, a divisão 238 : 2



Os alunos que já estão familiarizados com o processo de agrupar e trocar não sentem dificuldades para trocar a nota de 10 reais que sobrou, por 10 notas de 1, juntando-as às 8 já existentes e continuando normalmente o processo:



Ao passar para o registro, estamos sugerindo que, pelo menos inicialmente, os alunos representem também a troca realizada de modo que o algoritmo, conhecido como "processo longo" da divisão, apareça ainda mais longo, mas representando todo o raciocínio realizado.

#### **Observações**

1ª à medida que os alunos forem dominando o processo, eles já deixam naturalmente de manipular o material concreto, realizando as ações apenas mentalmente. Do mesmo modo, vão simplificando seus registros naturalmente.

O material concreto deve estar sempre à disposição deles para que cada um decida quando usá-lo ou não.

2ª Ao fazer o registro da divisão realizada, é importante que o aluno registre as ordens ocupadas pelos algarismos do dividendo e as correspondentes ordens que serão ocupadas pelos algarismos do quociente.

Embora possa parecer uma providência de pouca importância, ela tem se mostrado, didaticamente, bastante produtiva, pois previne erros muito comuns como, por exemplo, nos casos de "zero intercalado" ou "zero na ordem das unidades", no quociente.

Vejamos uma situação muito comum:

Para calcular o resultado de 210:2

a) O 1º aluno que aprendeu a usar o registro:

Ele sabe que está procurando os resultados em cada ordem e raciocina:

- "2 centenas divididas igualmente em 2 grupos resultam 1 centena por grupo";
- "1 dezena dividida igualmente em 2 grupos, resulta 0 dezena por grupo e é necessário trocar essa uma dezena por 10 unidades";
- "10 unidades divididas igualmente em 2 grupos, resultam 5 unidades por grupo".

o registro disso será:

b) O 2º aluno não aprendeu a observar as ordens dos algarismos do dividendo e quociente:

Ele raciocina: "2 dividido por 2, dá 1";

"1 dividido por 2, não dá, então formo 10 e 10 dividido por 2, dá 5".

Esse aluno registra erroneamente:

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 10 & 2 \\
-2 & 10 & 15 \\
\hline
0 & 0 & 
\end{array}$$



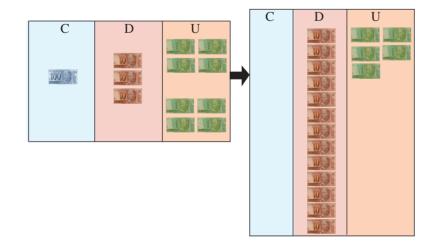
nheiro confeccionadas por você, faça a divisão 786 : 3. Registre suas ações no caderno para que você possa avaliar realmente o papel do uso de material concreto nesse processo.

Do mesmo modo como foi realizada a divisão "238 : 2", usando as "notas" de di-

#### O zero no quociente

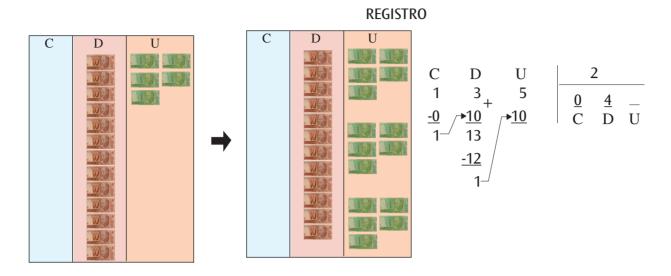
Vejamos alguns exemplos de casos em que o zero aparece em uma das ordens do quociente. É muito importante que o zero seja tratado como qualquer outro número no algoritmo da divisão, pois isso evitará uma série de dificuldades e erros muito freqüentes.

Seja a situação de dividir 135 reais por três pessoas. O raciocínio inicial do aluno será: se tivermos 1 nota de 100 reais para repartir igualmente entre 3 pessoas, cada uma receberá **zero notas** de 100 reais e essa nota deve ser trocada por 10 notas de 10 reais, que irão juntar-se às 3 já existentes.



#### **REGISTRO**

Dividindo as 13 notas de 10 reais pelas 3 pessoas, cada uma receberá 4 notas e sobrará 1 de 10 reais. Esta será trocada por 10 notas de 1 real que serão reunidas às 5 já existentes:



Finalmente, divide-se as 15 unidades por 3:

Aplicando sempre esse tipo de raciocínio, provavelmente, o aluno não apresentará os costumeiros erros nos casos de zero intercalado nas divisões. Por exemplo, para dividir 614 reais por 6 pessoas, o raciocínio dos alunos será:



#### REGISTRO (ALGORITMO)

#### E a tabuada?

Em geral, quando o divisor é maior que 5, começam as dificuldades com as tabuadas: o aluno fica tão preocupado em descobrir o resultado de uma multiplicação, que deixa de acompanhar as atividades do professor e do resto da classe. A conseqüência é que nem descobre o resultado procurado, nem compreende o processo de divisão que está sendo discutido.

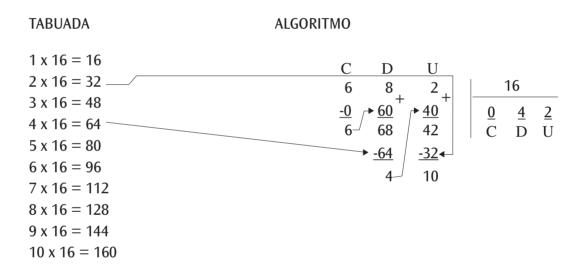


Nesse momento, o professor deve estar muito seguro sobre o que considera mais importante: verificar o domínio do aluno sobre as tabuadas ou fazê-lo compreender o processo da divisão. Se o mais importante, no momento, é o processo da divisão, devese evitar o acúmulo de atividades. Então, é preferível que o aluno tenha um tempo inicial para construir a tabuada a ser usada na divisão para depois consultá-la, quando necessário.

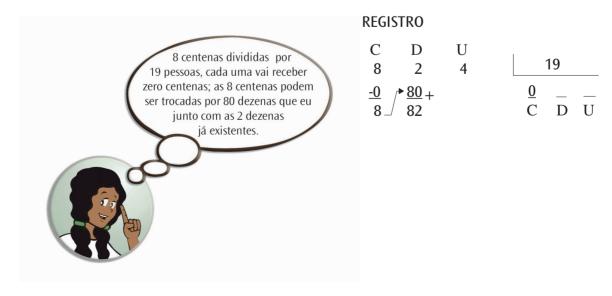
#### Divisões com divisor maior que 10

É muito importante que os processos de cálculo utilizados sejam sempre os mesmos. Assim, nas divisões em que o divisor é maior que 10, o procedimento será mantido. Por exemplo, para dividir 682 por 16, os alunos deverão iniciar o trabalho construindo uma tabuada do 16 a ser consultada durante a realização da divisão.

Alguns professores consideram o procedimento "uma perda de tempo", mas é bom lembrar que por meio dele os alunos compreendem que, nesse caso, não há diferença nenhuma em relação do modo de raciocinar anterior.



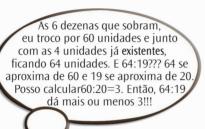
Aos poucos, o aluno percebe que não há necessidade de construir a tabuada toda, podendo fazer algumas estimativas. Por exemplo, para calcular 824 : 19

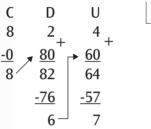


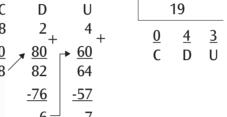
# 82 dezenas divididas por 19 pessoas... Já sei: 82 está próximo de 80 e 19 está próximo de 20. Fazendo 80 : 20, eu encontro 4. Então, 82 : 19 deve ser mais ou menos 4!

#### **REGISTRO**

#### **REGISTRO**









#### **Atividade 12**

Professor, faça as divisões propostas abaixo, considerando que, para a 1<sup>a</sup>, você deve construir a tabuada e para a 2ª, deve usar valores aproximados.

A seguir, faça uma avaliação dos dois procedimentos utilizados, comparativamente ao procedimento tradicional.

1 <sup>a</sup> ) 920 : 12	2ª) 894 : 18		

**Observação final**: à medida que o aluno adquire segurança quanto às ordens ocupadas pelos algarismos, ao efetuar a divisão, ele vai dispensando naturalmente o registro de C, D, U para identificá-las. Vai também abreviando as transformações de centenas em dezenas, destas em unidades, chegando a um registro mais simples, como no exemplo seguinte.



#### Lição de casa

Entre as atividades propostas nesta unidade, escolha uma situação de multiplicação e outra de divisão que sejam adequadas ao nível de sua classe.

Proponha essas atividades a seus alunos e faça um pequeno relato do desempenho e dos resultados obtidos por eles.



#### INICIANDO NOSSA CONVERSA

Nos fascículos anteriores você já teve a oportunidade de refletir sobre o ensino das operações fundamentais com números naturais e percebeu que muito além de levar o aluno a fazer contas com desembaraço e compreensão, o que nós, professores, pretendemos é levá-lo a analisar os problemas a serem resolvidos. Isso significa dizer, entre outras coisas, que a aprendizagem deve ser desenvolvida num contexto de resolução de problemas.

Quantas vezes, ao resolver uma situação, é preciso coletar dados, tratar as informações obtidas para que, mediante sua análise, possamos compreender melhor a situacão e tomar decisões!

Cada vez mais a comunicação entre as pessoas exige de nós uma compreensão da linguagem escrita que pode aparecer de maneiras muito diferentes quando um fato deve ser comunicado e analisado.

Os quadros abaixo destacam três exemplos que mostram a importância do tema a ser tratado nesta unidade. Ao ler as matérias, é bem possível que você esteja se perguntando:

- como preparar o aluno para que ele seja um "bom leitor" dessas informações?
- basta ler e decodificar ou é preciso que ele analise o que está lendo? se assim for, por quê?
- como relacionar o que a criança já sabe com Vôo diário: 2º, 3º e 5º vôos em code-share com as três mensagens apresentadas ao lado?

AIRBUS PARA PARIS							
IDA	RIO	SP	PARIS				
4º, 6º, sáb., dom.	20:00	22:30	14:40				
VOLTA	PARIS	SP	RIO				
2°, 5°, sáb., dom.	23:00	5:30	8:00				

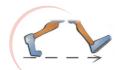
. Consulte nossos horários.



Teoria e Prática 3 · Unidade



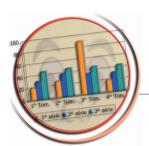
Nesta unidade, você vai refletir sobre essas questões e muito mais!



#### **DEFININDO NOSSO PONTO DE CHEGADA**

Ao final desta unidade esperamos que você seja capaz de:

- identificar a importância da organização de dados e sua representação como instrumentos fundamentais para a análise quantitativa de situações do cotidiano e dos vários campos do conhecimento;
- criar situações didáticas que facilitem a apropriação pelos alunos desses instrumentos de análise;
- estabelecer relação entre as operações com números naturais e a organização e representação de dados;
- criar situações didáticas em que essas relações sejam desenvolvidas.



# Seção 1

#### Coleta e organização de dados

Objetivos a serem atingidos nesta seção:

- identificar a importância da organização de dados e sua representação como instrumentos fundamentais para análise quantitativa de situações do cotidiano e dos vários campos do conhecimento;
- criar situações didáticas que facilitem a apropriação pelos alunos desses instrumentos de análise.

Na sala de aula são inúmeras as oportunidades de o professor desenvolver o ensino das operações integradamente com o ensino da coleta e análise de dados envolvidos numa situação.

Você viu nas unidades 1 e 2 vários exemplos em que as crianças foram levadas a arrumar e analisar dados em tabelas para resolverem questões de vários tipos, como por exemplo, no jogo "Prevendo resultados":

	Νú	Número de pontos de cada jogada						
jogada	2ª	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	Total
jogador								
José	Ш	I	-	I	Ш	Ш	I	9
Helena	I	-	Ш	П	-	I	Ш	8

Tabela 1

Uma das vantagens de apresentar os dados nesse tipo de arrumação é o de destacar e evidenciar as regularidades apresentadas por essas quantidades. Veja, por exemplo, o caso abaixo.



#### INDO À SALA DE AULA

Desejando apresentar aos pais o desempenho de seus filhos num determinado mês, a professora Ana foi buscar no diário de classe os dados necessários relacionados a todos os conceitos obtidos pelas crianças nas várias atividades desenvolvidas. Eis aqui uma parte desse diário.

	Notas						
Nome	Trabalho de casa	Prova	Trabalho em grupo				
Aldo	В	R	В				
Arnaldo	В	R	В				
Berenice	В	R	В				
Clara	В	R	В				
Dioniso	В	R	В				
Evandro	В	R	В				
Fernando	В	R	В				
Geraldo	В	R	В				
Helena	В	R	В				
•••••	••••	•••••					

0 – ótimo

B - bom

R – regular

I – insuficiente

Tabela 2

Analisando os dados do diário, a professora Ana considerou difícil perceber se o desempenho de sua classe foi bom ou não. Ela logo percebeu que a análise da situação de cada aluno não daria um panorama geral da classe. Resolveu, então, arrumar esses dados num outro tipo de tabela.

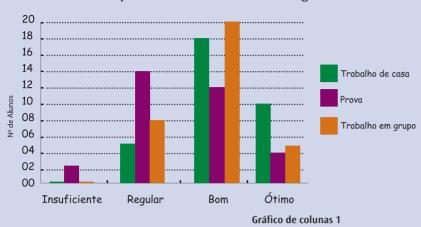
	Números de alunos		
	Trabalho de casa	Prova	Trabalho em grupo
I (insuficiente)	0	3	0
R (regular)	5	14	8
B (bom)	18	12	20
O (ótimo)	10	4	5

Tabela 3

# Teoria e Prática 3 · Unidade 3

# INDO À SALA DE AULA

Ana também apresentou esses dados num gráfico de colunas.



Analisando o gráfico, Ana, até então insegura em relação ao desempenho de sua classe, ficou satisfeita. Pareceu-lhe que tem mais alunos com desempenho BOM do que INSUFICIENTE, não é?



Todos os alunos da professora Ana foram avaliados em três atividades: trabalho de casa, prova, trabalho em grupo.

a)	Observe a tabela 3 e determine o número de alunos da professora Ana.
b)	Observe o gráfico e descubra em que atividade(s), mais da metade dos aluno obteve desempenho BOM. Faça o mesmo com o desempenho REGULAR.

Com o exemplo dos resultados de Ana, é fácil notar que a tabela e o gráfico facilitam muito as observações realizadas por você para responder às perguntas da atividade anterior. Seria muito difícil respondê-las olhando apenas no diário de Ana em que aparecem todos os dados de cada um dos alunos.

Para os alunos que estão iniciando a aprendizagem em matemática, a coleta de dados deve ser feita por meio de situações enfrentadas por eles em seu dia-a-dia (em casa, na escola, na rua onde brinca etc). O número de dados deve ser compatível com a capacidade de efetuar contagens ou com o conhecimento que têm sobre os fatos fundamentais das operações.

Por isso, o tratamento da informação deve ser feito integradamente com o desenvolvimento de outros conceitos e processos matemáticos (contagem, números, operações), juntamente com questões de outras disciplinas.

A seguir, você encontra duas atividades que têm o objetivo de exemplificar essa possibilidade de integração.



# INDO À SALA DE AULA

#### Contando e marcando

Atividade para ser feita em pequenos grupos.

Cada aluno do grupo vai pintar um quadrinho correspondente à idade de cada um, numa folha de papel quadriculado pertencente ao grupo.



A seguir, devem responder às perguntas:

- qual é a idade de cada um?
- há colegas com a mesma idade nesse grupo?
- quem é o mais velho? e o mais novo?
- escreva o nome das crianças partindo do mais velho para o mais novo.

# Teoria e Prática 3 · Unidade 3

# INDO À SALA DE AULA

#### Como está o tempo?

Uma tabela, como a apresentada ao lado, pode ser afixada na sala de aula para que, a cada dia, uma criança diferente marque com X o tempo que está fazendo.

Ao final do mês, todos analisam a tabela preenchida, respondendo às perguntas:

- em março tivemos mais dias de sol, nublados ou chuvosos?
- quantos dias nublados tivemos a mais do que dias chuvosos?
- em março, quantos dias de sol tivemos a mais do que os dias chuvosos?

	MARÇO	
		Manager
Х	х	x
х	х	х
х	х	х
х	х	х
х	x	х
Х	x	
Х	х	
X	x	
х	x	
X	x	
х		
X		
X		
х		
x		

Tabela 4

Essas atividades exigem que as crianças comparem o "tamanho" das colunas em que fizeram as marcações. Nelas as crianças fazem correspondência "um a um" entre os elementos de duas coleções. Na primeira atividade, cada ano de vida corresponde a um quadradinho, na segunda, cada um dos "X" corresponde a um dia.

Observa-se também que os "objetos" que representam um ano ou um dia ( e X) não significam outros objetos. Entretanto a representação pictórica (por meio de figuras), muito utilizada em gráficos, poderá trazer algum tipo de dificuldade de interpretação para as crianças que não estão familiarizadas com esse tipo de representação. Isso porque as figuras utilizadas para representar determinado objeto, são por si só objetos, têm significado próprio. Veja só um exemplo.

# INDO À SALA DE AULA



A professora apresenta às crianças o gráfico seguinte, dizendo que ele mostra onde os alunos estavam na hora do recreio no dia anterior. Informa também que cada **mochila** representa uma criança.

Sala de Aula					<b>(1)</b>			
Pátio	8	<b>&amp;</b>			<b>&amp;</b>	<b></b>		
Banheiro								
Biblioteca	8		<b>a</b>			<b>&amp;</b>		

Gráfico pictórico 1





# INDO À SALA DE AULA

O professor dá um tempo para as crianças observarem a tabela e pergunta em seguida: "No dia anterior,

- onde as crianças preferiram ficar na hora do recreio?"
- quantos alunos estavam no banheiro na hora do recreio?"
- onde havia mais alunos dessa classe na hora do recreio?"
- quantas crianças dessa classe vieram à escola?"

Nesse caso, além do seu próprio significado, a mochila tem um outro: ela "significa" um aluno. O contato com representações desse tipo tem o objetivo de familiarizar as crianças com uma forma de linguagem, cada vez mais utilizada na sociedade em que vivemos.



Professor, procure num jornal ou revista algum gráfico que utilize esse tipo de representação — pictórica. Recorte-o e cole aqui. Ao lado, dê uma explicação sobre a que se refere o gráfico.

/	\
<b>\</b>	,

Nas três atividades anteriores, o aluno estabelece correspondência entre os elementos de uma coleção presente (coleção dos quadradinhos pintados, dos "X", das mochilas) e de outra coleção ausente (dos anos de idade, dos dias do mês, dos alunos). Essas atividades podem ser desenvolvidas juntamente com a atividade do Mosaico e da Igrejinha que você viu no TP1.

Quando as quantidades envolvidas na situação são grandes, é conveniente que um símbolo do gráfico represente mais de um elemento da coleção cujos dados estamos coletando.

No caso, o professor poderá propor a seus alunos uma atividade introdutória para que eles sintam a necessidade de "abreviar" a representação dos dados obtidos.

Por exemplo, pedir aos alunos que tragam uma tampinha de seu refrigerante preferido, para que possam saber qual é a preferência em sua sala de aula.

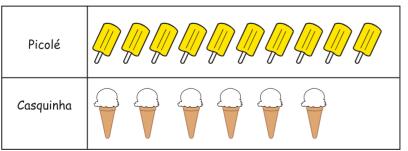
Solicitados a formarem uma pilha com cada tipo de tampinha, logo perceberão que essas pilhas nem sempre se equilibram, devido ao número de tampinhas.

Nesse momento, eles poderão ser incentivados a substituir um certo número de tampinhas por um certo objeto (1 caixa de fósforos para 5 tampinhas, por exemplo) ou mesmo a agrupá-las com um elástico (de 5 em 5, por exemplo) empilhando-os de forma mais estável.

Observando as pilhas (de tampinhas ou de caixas), logo perceberão que a maioria preferem coca-cola, ficando a preferência do guaraná em 2º lugar e a soda em 3º.

Atividades dessa natureza exigem do aluno um trabalho de organização dos dados: tipos de tampinhas, número de tampinhas conveniente para agrupar etc – procedimentos que envolvem as açãos de clas-

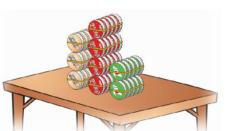
sificar e quantificar. É conveniente propor outras atividades como essa, envolvendo "valores". Assim, por exemplo, no caso de uma pesquisa feita entre os alunos das 1<sup>as</sup> séries sobre a preferência do tipo de sorvete, a organização dos dados obtidos deverá levar em conta a quantidade de alunos que a figura de cada sorvete representa.







É conveniente propor a análise de um gráfico semelhante a esse a crianças que já estejam familiarizadas com agrupamentos e trocas no SND e com a composição de dezenas.

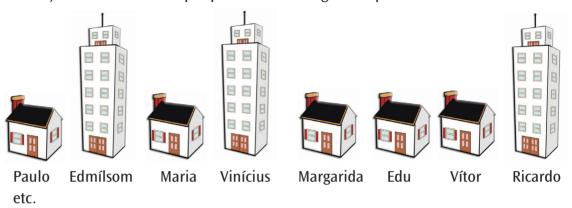




Muitas vezes os dados coletados numa pesquisa são arrumados em tabelas, como fez a professora Ana com os resultados do desempenho de seus alunos.

Tabelas simples favorecem a comunicação de resultados e a confecção de gráficos. As primeiras marcações e tabulações devem ser aquelas sugeridas pelos alunos. Em geral, eles desenham os próprios objetos na tabela mas, com o decorrer do tempo, percebem que isso dá muito trabalho e, na tentativa de simplificar a representação, vão criando figuras que nada têm a ver com o que querem representar.

Por exemplo, ao ser solicitado aos alunos de uma 1ª série que pesquisassem entre os colegas de classe os que moravam em casa ou em apartamento, as primeiras representações do resultado da pesquisa foram do seguinte tipo:

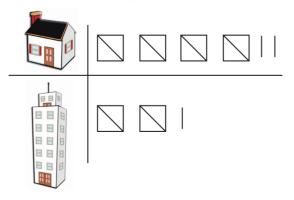


Quando lhes foi perguntado se havia mais alunos morando em apartamento ou em casa, eles precisaram contar as casinhas e apartamentos um a um.

A professora incentivou-os a arrumar o resultado da pesquisa de um modo semelhante àquele utilizado na atividade "Como está o tempo?" surgiu, então, a tabela:



Imediatamente alguém sugeriu que poderiam agrupar os palitos para obterem uma tabela menor, como vira alguém anotar para saberem quantos refrigerantes deveria comprar.



As crianças já haviam trabalhado com a tira numérica marcando números de 5 em 5 a partir do 1 e não tiveram dificuldade em agrupar os palitos de 5 em 5. Perceberam facilmente que mais alunos moravam em casas do que em apartamento.

As situações de sala de aula também oferecem inúmeras oportunidades para realizar atividades envolvendo levantamento de dados, organização, representação, comunicação e interpretação.

# INDO À SALA DE AULA



Aproveitando um momento de integração entre seus alunos, a professora Ana passou uma lista para eles preencherem.

Nome	Endereço	Telefone	Tempo para vir de casa à escola
Margarida	Av. dos Eucaliptos, 32	311-4747	15 minutos
Júlio	Rua D, 3		40 minutos
Mauro	Rua Marechal Deodoro, 75	624-5711 (rec)	30 minutos
Edu	Av. das Américas, 329		2 minutos
Edmilson	Rua da Independência, s/n	331-5967	45 minutos
		(comunitário)	
Carla	Estrada da Luz, s/n		1 hora e meia
Maria	Rua 7 de Setembro, 10	3147-0008	1 hora
Evandro	Av. das Américas, 329		2 minutos

Com uma cópia da lista em mãos, os alunos puderam analisá-la, mediante as perguntas feitas pela professora:

- quantos alunos não têm telefone? quem são eles?
- quem mora na mesma casa de Edu? por quê?
- qual é o número do telefone de Maria?
- qual é o número da casa de Júlio?
- quem mora em casa sem número?





# INDO À SALA DE AULA

A professora também pediu que as crianças completassem outras tabelas

Número de
alunos
4
4
Tahela 5

Tempo para	Número de
vir à escola	alunos
30 minutos ou menos	4
entre 30 e 45 minutos	1
45 minutos ou mais	3

Tabela 6

Com esse levantamento, a professora percebeu quantas crianças moravam longe da escola e pôde solicitar o serviço gratuito de transporte escolar oferecido pela prefeitura de sua cidade para alunos que tinham essa dificuldade.

Muitas vezes as situações com as quais nos deparamos são mais complexas, principalmente quando mais de uma característica dos dados é observada. Por exemplo, a professora Ana, ao perguntar ao sorveteiro que ficava em frente à escola, sobre os tipos e sabores preferidos pelos alunos, despertou-lhe a atenção para saber essa informação. Ele resolveu fazer, então, uma pesquisa, obtendo os resultados mostrados na tabela a seguir. (os números representam quantidades de alunos)

Sabor Tipo	Morango	Сосо	Chocolate
	80	50	120
	40	50	20

Tabela 7

Surpreso com os resultados obtidos, o sorveteiro disse animado:

— Preciso ter sempre muitos picolés de chocolate no meu carrinho!

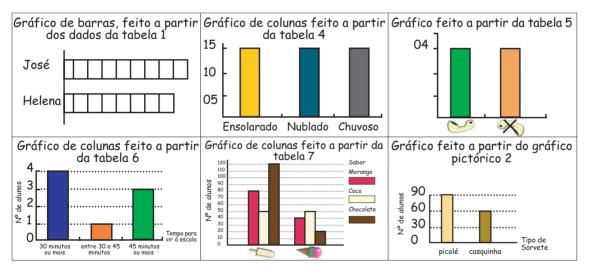
Aproveitando a idéia do sorveteiro, a professora Ana levou a tabela para a classe. Os alunos se divertiram muito ao analisá-la, tentando colocar-se numa das quadrículas de acordo com suas preferências pessoais.



Professor, se seus alunos já conhecessem os números até 100 e realizassem adições see domínio, que perguntas faria a eles para que pudessem analisar essa tabela?

A tabela do sorveteiro nos mostra a variação de dois atributos (qualidades) dos sorvetes que ele vendia — o **sabor** e o **tipo**. Nesse caso, a tabela tem o nome de **tabela de dupla entrada**: na linha superior varia o sabor e na coluna da esquerda varia o tipo.

A partir de tabelas como essa, é possível construir gráficos e vice-versa. As duas representações dos dados obtidos numa situação (tabela e gráfico) sempre que possível devem ser trabalhadas integradamente, de modo que a criança possa transitar de uma para a outra, com compreensão. Algumas tabelas e gráficos do texto servirão de exemplo para ilustrar essa transformação.





Retorne ao gráfico de colunas 1 feito pela professora Ana, a partir da tabela 3, para analisar o desempenho de seus alunos. Construa em seu caderno um outro gráfico de colunas, diferente do da professora. Descreva o desempenho de seus alunos, levando em conta a quantidade deles e o tipo de atividade avaliada.



Objetivos a serem alcançados nesta seção:

- estabelecer relações entre as operações com números naturais e a organização e representação de dados;
- criar situações didáticas em que essas relações sejam desenvolvidas.

Como você deve ter observado até aqui, ao longo do trabalho com números naturais, já recorremos várias vezes à organização de informações em gráficos e tabelas, pois esse é um recurso que facilita o estabelecimento de relações entre os dados, permitindo que importantes conclusões sejam estabelecidas durante o processo de resolução de problemas.

Do mesmo modo, ao analisar e interpretar uma tabela ou um gráfico, muitas vezes é necessário realizar operações entre os dados apresentados para responder a perguntas surgidas a partir deles.

Assim, para a compreensão das situações da realidade, o trabalho com o tratamento da informação necessita das operações com números naturais e vice-versa.

Vamos analisar, então, algumas situações-problema que podem ser exploradas em sala de aula.



Analisando cada uma das situações apresentadas a seguir, responda às questões fazendo um levantamento dos procedimentos realizados por você para obter as respotas solicitadas.

# Situação 1

O professor de Educação Física aplicou, em uma de suas classes de 4<sup>a</sup> série, o seguinte questionário para conhecer as preferências de seus alunos por alguns esportes:

Classe: 4 <sup>a</sup> ( )	sexo	masc ( )	fem ( )	
Indique o seu es	sporte prefe	erido:		
futebol ( )	vôlei ( )	basquete ( )	outro ( )	nenhum ( )

Depois de recolhidos os questionários, ele fez a tabulação dos dados e montou a tabela abaixo.

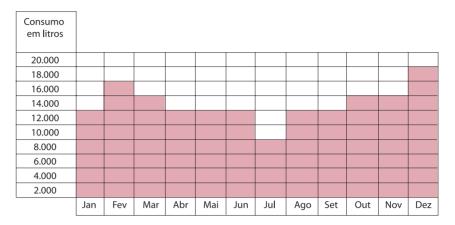
Esporte preferido	Meninas	Meninos	Total
Futebol	12	48	60
Vôlei	40	30	70
Basquete	6	24	30
Outros	10	5	5
Nenhum	4	1	5
Total	72	108	180

**OBSERVAÇÃO:** Um time de futebol é formado por 11 jogadores; um time de vôlei, por 6 jogadores e um de basquete, por 5 jogadores.

Ex	amine a tabela para responder às questões abaixo.
a)	Nas classes consultadas há mais meninas ou meninos?
h)	Qual a diferença entre os totais de meninos e de meninas?
_	Quai a unerença entre os totais de menmos e de menmas:
c)	Qual esporte teve o maior número de votos?
d)	Qual o esporte preferido pelos meninos? E pelas meninas ?
e) _	Quantos times de futebol é possível formar com os meninos que preferem esse esporte? Vão sobrar alunos para a reserva?
f)	Quantos times femininos de vôlei poderão ser formados com as meninas que preferem esse esporte?

#### Situação 2

A escola de Campina Bela registrou, em um gráfico, o consumo mensal de água, durante ano de 1999. O gráfico, ficou assim representado.



Consultando o gráfico, pode-se visualizar rapidamente as informações, tornando possível estabelecer relações entre os dados e responder a várias perguntas de interesse, conforme mostrado abaixo.

- a) Em que mês(es) o consumo foi maior?
- b) Em que meses o consumo foi de 10.000 litros ou mais?
- c) Em que mês se gastou a menor quantidade de água? Você pode imaginar o motivo?
- d) O consumo de água foi maior no 1º ou no 2º semestre? Qual foi a diferença de consumo entre os dois semestres?
- e) A empresa fornecedora de água oferece um desconto para as escolas que tiverem um consumo anual menor que 150.000 litros. Essa escola conseguiu obter o desconto?
- f) Chama-se "consumo médio mensal" o número que se obtém dividindo o consumo total do ano, por 12. Qual foi o consumo médio mensal da escola?



Baseado-se em assuntos de interesse de seus alunos, pesquise temas em il	vros
revistas ou crie suas próprias pesquisas. Em seguida, organize os dados em tab	elas
levante uma série de questões a serem respondidas por eles mediante cons	ulta
tabela organizada e realização das operações adequadas.	

e à

# A proporcionalidade

Outro tema bastante favorecido pelo trabalho com o Tratamento da Informação é o da proporcionalidade. Essa é uma das mais fortes idéias matemáticas. Aparece no campo dos Números, da Geometria e Medida e no exame de inúmeros fenômenos da realidade.

Podemos citar algumas situações em que o raciocínio proporcional está presente:

- na representação de glebas de terra, edifícios, máquinas etc, através de maquetes, plantas, mapas em que são usadas escalas;
- na descrição facilitada de fenômenos que lidam com grandes números, utilizando-se o recurso da porcentagem;
- em situações em que é necessário repartir uma quantidade de dinheiro em partes proporcionais, como questões de heranças ou sociedades comerciais;
- na arquitetura ou na arte em geral em que se buscam as formas harmoniosas, equilibradas e belas;
- na música, em que a harmonia dos acordes é baseada nas relações de proporcionalidade entre os comprimentos das cordas.

Nos programas tradicionais de ensino, não é mostrada a importância da proporcionalidade. A impressão que se tem é que só aparece em problemas de regra de três e em fórmulas de juros e porcentagem, como se fosse apenas "um conteúdo a mais" para se trabalhar em Matemática.

No entanto, muitas pesquisas mostram que desde cedo (por volta dos 5 a 7 anos), observando a realidade que a cerca, a criança já usa, de modo intuitivo, a proporcionalidade.

Por exemplo, quando a criança imagina o tamanho real e um objeto colocado ao longe, ou quando observa objetos representados em figuras ou fotos está utilizando princípios da proporcionalidade. Este processo se dá, não só no nível qualitativo, como também em estimativas de natureza quantitativa, quando, por exemplo, a criança observa o "tamanho incrível" de uma árvore, comparando-o à altura de um homem, como a que aparece na foto ao lado.



Dos 7 aos 12 anos, mais ou menos, por meio de experiências de comparações entre dois comprimentos ou duas alturas, podem surgir situações em que os números racionais começam a ter mais significado para as crianças.

Nesta fase, a proporcionalidade está sendo desenvolvida "na prática", nas ações, mas ainda não pode ser representada e utilizada de maneira formal. Inúmeros estudos realizados têm mostrado que, com objetos concretos, a criança começa a construir uma noção inicial. A proporcionalidade vai se definindo muito lentamente, de modo que o raciocínio proporcional, desacompanhado de ações físicas, raramente ocorre antes dos 15 anos.

Em uma pesquisa sobre o ensino de Matemática (\*\*), em escolas da rede estadual de ensino de São Paulo, uma das questões apresentadas aos alunos cursando 4º bimestre da 4ª série foi a seguinte:

8 pêssegos custam Cr\$ 70,00. Comprando 12 desses pêssegos, quanto uma pessoa irá gastar?

Apenas 0,4 % dos 3.087 alunos avaliados encontraram a resposta correta, procurando o preço da metade de 8 pêssegos, e somando esta quantia aos Cr\$ 70,00 (percebendo que 8 é o mesmo que "dois grupos de 4 pêssegos" e 12 é o mesmo que "3 grupos de 4 pêssegos", ou seja, que 8 e 12 são proporcionais a 2 e 3).

Outros 15,6 % do total de alunos, que também acertaram as questões, resolveram-na por meio da técnica normalmente trabalhada nas escolas: encontrar o preço de 1 pêssego e multiplicar esse preço por 12 (raciocínio que levou a muitos erros de cálculo, pois 70 não é múltiplo de 8).

Este exemplo nos mostra que as questões ligadas ao raciocínio proporcional não têm sido exploradas no ensino fundamental no Brasil.

Atualmente, todos os estudos a respeito de currículos de Matemática dos diversos países são unânimes em reconhecer a importância de um trabalho que enfatize o estudo proporcionalidade no ensino fundamental.

\*Pesquisa-Avaliação sobre o ensino de Matemática - Relatório. SE/CENP/CECISP. São Paulo, 1981

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática (p.54), lemos o seguinte:

"Também algumas idéias ou procedimentos matemáticos, como a proporcionalidade, composição e estimativa, são fontes naturais e potentes de inter-relação e, desse modo, prestam-se a uma abordagem dos conteúdos em que diversas relações podem ser estabelecidas.

A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real."

Fica, assim, evidente a necessidade de a escola estar atenta, oferecendo situações em que a proporcionalidade seja apresentada aos alunos **em diferentes níveis de abordagem**, desde o momento em que eles conseguem captar as idéias intuitivamente, aplicando-as em situações-problema, até a etapa em que são capazes de atingir a formalização e sistematização deste conhecimento.

É possível, então, pensar-se em uma seqüência de trabalho a ser iniciado no 1º ciclo do ensino fundamental, indo até o ensino médio. Veja, então, algumas sugestões de atividades que podem ser utilizadas para iniciar esse trabalho. Nessas atividades, torna-se evidente a importância da organização dos dados em tabelas e gráficos, como elemento facilitador das observações.

Desde que os alunos já tenham construído o conceito de multiplicação, pode-se realizar uma análise de tabelas, em que eles sejam incentivados a observar, de modo bastante simples e intuitivo, como as grandezas se relacionam de maneira diretamente proporcional.

# Situação 1

Uma caixa contém 5 lápis de cores. Quantos lápis haverá em 2 caixas? E em 3 caixas? E em 6 caixas?

No caso, é possível organizar uma tabela assim:

Total de caixas	Total de lápis nas caixas
1	5
2	10
3	15
6	30

Os alunos deverão analisar as variações das grandezas envolvidas: "total de caixas" e "total de lápis".

Numa primeira análise, as crianças poderão observar que, à medida que **aumenta** o total de caixas, também **aumenta** o total de lápis (como primeiro contato com a idéia de variação diretamente proporcional de grandezas, basta esta observação).

# Situação 2

Em um parque de diversões, cada cadeirinha da roda gigante leva 3 pessoas. Quantas pessoas levará a roda gigante, se 4 cadeirinhas estiverem completas? E se forem 8 cadeirinhas?

As grandezas, agora, são: "total de cadeirinhas ocupadas" e "total de pessoas" que estão na roda gigante.

Novamente, é importante que os alunos façam suas observações com os números organizados em uma tabela.

Total de cadeirinhas ocupadas	Total de pessoas na roda gigante
1	3
4	12
8	24

Com a apresentação de outras situações semelhantes, aos poucos, os alunos irão verificar que a relação entre as variações de grandezas neste tipo de situação é de **natureza multiplicativa**, ou seja: na situação 1, irão concluir que:



Ou seja, Lauricea percebeu que

 $3 \times 1 = 3$ ;  $3 \times 5 = 15$  e  $2 \times 3 = 6$ ;  $2 \times 15 = 30$ 

Teoria e Prática 3 · Unidade 3

Como a multiplicação e a divisão são operações inversas, Lauricea também pode pensar que o **quociente** entre as grandezas permanece constante:

$$3:1=3$$
;  $15:5=3$  e  $6:3=2$ ;  $30:15=2$ 

Na situação 2, eles irão descobrir que, novamente, a variação entre as grandezas é de **natureza multiplicativa**:



Ou seja, Januário descobriu que:

$$1 \times 3 = 3$$
;  $4 \times 3 = 12$  e  $2 \times 4 = 8$ ;  $2 \times 12 = 24$ 

Januário poderia também ter considerado que o quociente entre as grandezas permanece constante:

$$3:1=3$$
;  $12:4=3$  e  $8:4=2$ ;  $24:12=2$ 

Devemos, também, oferecer aos alunos situações em que eles possam fazer divisões, para encontrar os resultados procurados, como:

# Situação 3

Para fazer 4 quindins, Dona Mariana gasta 20 ovos. Então, quantos ovos ela vai gastar para fazer 2 quindins? E para fazer 6 quindins? E 3 quindins?

Organizando uma tabela, com as grandezas presentes na situação, fica fácil ver as relações:

Total de quindins	Total de ovos
4	20
2 (metade de 4)	20 : 2 = 10
6 (o triplo de 2)	3 x 10 = 30
3 (metade de 3)	30 : 2 = 15



Professor, crie duas situações-problema ligadas à realidade de seus alunos, de modo
que eles organizem, para cada caso, uma tabela mostrando a variação de duas gran-
dezas, e que a relação entre elas seja de natureza multiplicativa.

Os contra-exemplos, isto é, situações que não apresentam proporcionalidade, são excelentes meios para o aprofundamento dos conceitos. Assim, é importante que os alunos (por volta do 4º ano) analisem situações em que as relações entre as grandezas envolvidas **não são de natureza multiplicativa**, ou seja, as grandezas examinadas não são diretamente proporcionais.

Assim, podem ser analisadas situações como:

# Situação 4

Em um restaurante, há a seguinte oferta: cada grupo de pessoas que fizer uma refeição deverá pagar a taxa fixa de R\$ 5,00, mais um adicional de R\$2,00 por pessoa, tendo cada um o direito de comer quanto desejar. Veja a tabela:

Total de pessoas	Despesas
1	R\$ 5,00 + R\$ 2,00 . 1 = 7,00
2	R\$ 5,00 + R\$ 2,00 . 2 = 9,00
3	R\$ 5,00 + R\$ 2,00 . 3 = 11,00
4	R\$ 5,00 + R\$ 2,00 . 4 = 13,00

Analisando os dados na tabela, os alunos irão concluir que, embora a "despesa" aumente à medida que o "total de pessoas" aumenta, estas grandezas **não são** diretamente proporcionais, pois o quociente da divisão entre o preço e o número de pessoas não permanece constante:  $7,00 \div 1 \quad 9,00 \div 2 \quad 11,00 \div 3 \quad 13,00 \div 4$ .

Podem perceber que essa **não proporcionalidade** deve-se ao fato de que duas pessoas gastam R\$ 9,00, mas quatro pessoas (o dobro de duas) gastam R\$ 13,00, não sendo, evidentemente, o dobro de R\$ 9,00.



Professor, analise cada um dos problemas apresentados a seguir, e selecione aqueles em que **não** está presente uma situação de proporcionalidade (reveja a situação 4, se sentir dificuldade).

1)	metros corri no 2º dia?
2)	<ul> <li>Uma papelaria está fazendo várias promoções. Está vendendo:</li> <li>1 pacote contendo 1 caixa de lápis de cor e 2 cadernos por R\$ 7,00; ou;</li> <li>1 pacote contendo 1 caixa de lápis e 4 cadernos por R\$ 11,00; ou</li> <li>1 pacote contendo 1 caixa de lápis e 6 cadernos por R\$ 15,00.</li> </ul>
	Quanto custará um pacote contendo 1 caixa de lápis de cor e 10 cadernos?
3)	Para favorecer seus fregueses, um feirante vende 1 pé de alface por R\$ 0,70 e quem leva 2 pés só paga R\$ 1,00. Quanto gasta, no mínimo, uma pessoa que compra 5 pés de alface?
4)	Se 2 graviolas custam 5 reais, qual é o preço de 8 graviolas?
5)	Como posso descobrir o resultado de 6 x 18, se já sei que 6 x 9 = 54?

Nas atividades realizadas anteriormente, você viu que nas situações **2**) e **3**) a relação entre as grandezas envolvidas **não é de natureza multiplicativa**, ou seja, estamos lidando com grandezas que **não são proporcionais**.

Para que os alunos (por volta do 4° ano) percebam a utilidade do raciocínio proporcional, é importante que sejam colocados diante de problemas em que fica mais fácil solucioná-los se for usado esse tipo de raciocínio, como no exemplo abaixo:

6 pessoas pagam R\$10,00 para fazer um certo trajeto em um ônibus. Quanto pagarão 9 pessoas para fazer o mesmo trajeto?

Sabemos que, tradicionalmente, muitos professores vêem esse tipo de problema como sendo de difícil resolução para alunos de 4° ano. Acreditam que esse tipo de problema exige cálculos complicados quando se trata resolvê-lo buscando o preço unitário por meio de uma divisão. Acreditam que a divisão de R\$ 10,00 por 6 ainda é muito complexa para esses alunos, já que 10 não é múltiplo de 6.

No entanto, para alunos familiarizados com o raciocínio proporcional, a solução do problema poderá ser encontrada de modo muito simples:



10,00:2=5,00 - este é o preço da passagem de cada grupo de 3 pessoas.

 $3 \times 5,00 = 15,00$  - este é o preço da passagem das 9 pessoas

A próxima etapa para os alunos utilizarem o raciocínio proporcional será oferecer oportunidade para que analisem situações em que as grandezas são **inversamente proporcionais**, como:

#### Situação 5

Um aluno deve ler um livro de 60 páginas. Ele está calculando quantas páginas deve ler por dia para encerrar sua tarefa, dentro do prazo estipulado pelo professor. Assim, ele fez alguns cálculos. Veja:

Total de páginas lidas por dia	Total de dias para ler 60 páginas
10	6
15	4
20	3
30	2

Analisando a tabela acima, os alunos verificarão que, à medida que uma das grandezas (total de páginas lidas por dia) **aumenta**, a outra (total de dias para ler o livro) **diminui**. Irão observar, também, que neste caso o total de páginas permanece constante (60 páginas) e a operação realizada para descobrir o total de dias necessários é a divisão:

60: 10 = 6; 60: 15 = 4; 60: 20 = 3; 60: 30 = 2

Ou seja, podemos também considerar que o **produto entre os totais envolvidos** é sempre constante, igual a 60:

$$10 \times 6 = 60$$
;  $15 \times 4 = 60$ ;  $20 \times 3 = 60$ ;  $30 \times 2 = 60$ 

Tal relação caracteriza as grandezas inversamente proporcionais.

Veja mais um exemplo:

Uma costureira comprou uma caixa com 120 botões para colocar em camisas. Ela calculou que, se colocasse 12 botões em cada camisa, a caixa seria suficiente para 10 camisas. Se ela colocasse 8 botões em cada uma, a caixa será suficiente para quantas camisas? E se fossem 15 botões por camisa?

Total de botões da caixa	Total de botões por camisa	Total de camisa
120	12	120 : 12 = 10
120	8	120 : 8 = 15
120	15	120 : 15 = 8

Observa-se, pela tabela que:

- aumentando o total de botões por camisa, diminui a quantidade de camisas;
- diminuindo o total de botões por camisa, aumenta o número de camisas, de modo que o produto dos números correspondentes nas grandezas é constante:

$$10 \times 12 = 120$$
;  $15 \times 8 = 120$ ;  $8 \times 15 = 120$ 

Assim, conclui-se que o total de botões e o número de camisas são duas grandezas inversamente proporcionais.



Professor, analise as situações apresentadas a seguir e indique, em cada uma delas, se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nenhuma delas (consulte os exemplos anteriores, se sentir dificuldade).

- 1) Um automóvel faz um certo percurso a uma velocidade de 80 km por hora, em 3 horas. Se sua velocidade for de 120 km por hora, quanto tempo levará para fazer o mesmo percurso?
- 2) 4 metros de um tecido custam R\$ 36,00. Se a costureira quiser comprar 2 metros do mesmo tecido, quanto gastará?
- 3) 6 operários fazem uma tarefa em 3 horas. Se fossem apenas 4 operários, quanto tempo levariam para fazer o mesmo trabalho?
- 4) Numa lanchonete, um cachorro-quente custa R\$ 2,00 e um refrigerante custa R\$ 1,00. Uma pessoa que freqüenta diariamente essa lanchonete marcou, em uma tabela, o que consumiu em três dias.

Consumo			
Dia	Cachorro-Quente	Refrigerante	Despesa
1º	1	1	R\$ 3,00
2°	1	2	R\$ 5,00
3°	1	3	R\$ 7,00

Se mantiver esse consumo, quanto essa pessoa gastará no 4º dia?		

Todo este trabalho com a variação de grandezas – proporcionais ou não – feito de maneira experimental, em situações específicas, vai permitindo aos alunos descobrirem, gradativamente, as regularidades dos dados examinados. O amadurecimento e reflexão sobre essas descobertas lhes permitirá, ir aos poucos, desenvolvendo o raciocínio proporcional.

Em resumo, podemos dizer que, segundo as experiências de Piaget e muitos outros pesquisadores, o conceito de proporcionalidade é bastante complexo e só vai se consolidar por volta dos 15 ou 16 anos. Acreditamos, no entanto, que expondo a criança, desde cedo e de maneira informal, a situações em que estejam envolvidas as relações de proporcionalidade, a escola poderá ajudá-la a atingir este estágio de maneira mais trangüila e significativa.

Outros temas em que a proporcionalidade exerce um papel fundamental são: os **números racionais**, a **geometria** e a **medida**. Nas Unidades relativas a esses assuntos, voltaremos a tratar dele.



# Lição de casa

1. A partir de um diálogo com sua classe, faça um levantamento dos temas de interesse das crianças.

Com a classe organizada em grupos, solicite de cada um a realização de uma pequena pesquisa sobre um dos temas levantados na discussão inicial.

Proponha que cada grupo apresente para a classe os resultados de sua pesquisa (utilizando tabelas, gráficos).

2. Descreva aqui os resultados obtidos com essa atividade.	
_	

# Referências Bibliográficas

• ONUCHIC, L. de la R. e BOTTA, L. S. "Reconceituando as quatro operações fundamentais". In *Revista da Educação Matemática*, ano 6, nº 4, 1998, pp. 19-26

Neste texto, as autoras mencionam as últimas pesquisas sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na conceitualização das operações fundamentais para, em seguida, apresentar modelos aditivos e subtrativos de situações pertencentes a um mesmo campo conceitual — o aditivo. Desenvolvem o mesmo trabalho em relação à multiplicação e à divisão.

Este texto mostra ao professor as várias idéias veiculadas pelas operações, o que dá margem ao professor de:

- perceber onde reside mais ou menos dificuldade na aprendizagem;
- · elaborar atividades adequadas para familiarizar o aluno com tais idéias.
- SAIZ, I. "Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir". In *Didática da Matemática refle*xões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. pp 156 – 174 e pp 182 – 183.

O texto apresenta uma pesquisa com 300 alunos de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries, cujos professores se mostravam preocupados em melhorar o nível de aprendizagem em Matemática, em suas escolas.

O tema focalizado foi a divisão e, para o estudo, solicitou-se que os alunos resolvessem cinco situações-problema relacionadas à divisão (selecionadas entre as habituais, de 4ª ou 5ª) e que calculassem os resultados que quatro divisões com números naturais.

Foram observados alguns fatores ligados aos problemas, como:

- a) O significado que os alunos atribuem à divisão para isso, os pesquisadores buscaram responder a algumas perguntas, como as que seguem:
  - como os alunos reconhecem que uma divisão resolve esse problema?
  - como funciona a divisão?
  - como a divisão se relaciona com as demais operações (multiplicação, adição e subtração)?
- b) Aspectos cuja presença ou ausência influem na possibilidade de resolução de um problema, tais como:
  - tipo de número utilizado (natural, racional sob representação fracionária ou racional sob representação decimal):
  - ordem de grandeza dos números envolvidos (menores que 10, menores que 100, menores que 1000,...)
  - a função do número no problema (cardinal, medida,...)

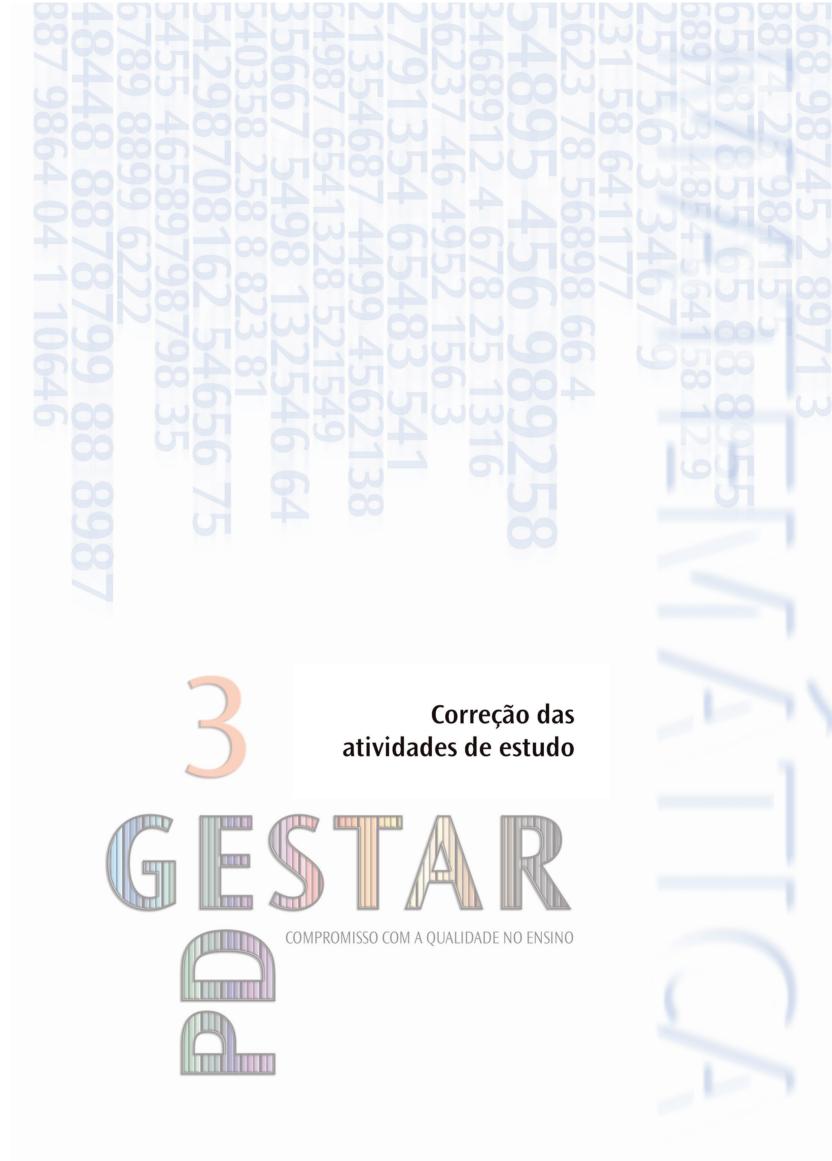
Quanto às técnicas operatórias utilizados pelos alunos para calcular os resultados das divisões apresentadas na prova, também foram analisados alguns fatores que influem na execução dos algoritmos, tais como:

- o divisor ser menor ou maior que 10 ("um só ou mais que um algarismo na chave");
- a presença ou não do zero na representação dos números envolvidos nas divisões;
- a relação entre o resto e o divisor.

Com o resultado da pesquisa, surgem algumas recomendações aos professores, tais como:

- enfatizar a análise e interpretação dos enunciados dos problemas;
- valorizar o trabalho de reconstrução, análise e comparação de procedimentos utilizados pelos diversos alunos (atitude reflexiva e comprometida na procura de soluções para as situações apresentadas);
- valorizar o uso do cálculo mental (e estimativa da ordem de grandeza de resultados procurados).

Pesquisa-Avaliação sobre o ensino de Matemática - Relatório. SE/CENP/CECISP. São Paulo, 1981.



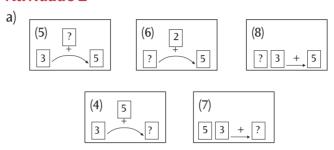
# Operações com Números Naturais

# Unidade 1 - Seção 1

#### **Atividade 1**

A resposta se encontra no próprio texto, em seguida a esta atividade.

#### Atividade 2



b) Resposta pessoal. Por exemplo: Juntando suas 5 bonecas com as da irmã, Maria ficou com uma coleção de 8 bonecas. Quantas bonecas tinha a irmã da Maria?

#### **Atividade 3**

Problema	Esquema	Transformação	Operação
10.	8 <del>- 5</del> →?	Subtrativa	8 – 5 = 3
11.	8 <del>-?</del> → 3	Subtrativa	8 – 3 = 5
12. Sugestão: ao perder 3 pontos numa jogada, Pedro ficou com 5 pontos. Quantos pontos Pedro tinha antes dessa jogada?	? <del>-3</del> 5	Subtrativa	5 + 3 = 8

#### **Atividade 4**

a)	Procedimento	Situação
	1º	aditiva
	2°	subtrativa
	3°	aditiva

b) O esquema pode representar o 3º procedimento.

#### **Atividade 5**

a) Resolve situações aditivas quando obtém face branca no dado e situações subtrativas quando obtém face cinza.

Também quando faz as apostas, o jogador resolve situações aditivas ou subtrativas, no caso de apostar em uma casa mais à frente daquela em que está, ou mais atrás, respectivamente.

- b) Não necessariamente obtendo somente faces brancas pois, para um jogador ser vencedor ele precisa atingir primeiro a casa 30, fazer corretamente o maior número possível de apostas e acertar o maior número de apostas.
- c) Entre as habilidades cognitivas que esse jogo pode favorecer podemos citar:
  - estimar resultados, fazer previsões;
  - efetuar cálculos mentais;
  - computar pontos e registrá-los em tabelas;
  - identificar e efetuar transformações aditivas (obter face branca) ou subtrativas (face cinza).

# Unidade 1 - Seção 2

#### **Atividade 6**

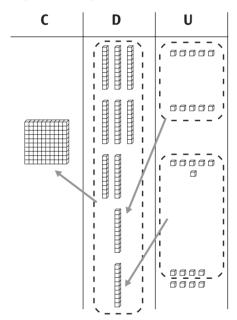
Respondida no próprio texto, após esta atividade.

#### **Atividade 7**

Resposta pessoal.

#### **Atividade 8**

Uma possível resposta:



# Lição de casa da Unidade 1

Uma possível resposta:

# Unidade 2 - Seção 1

#### **Atividade 1**

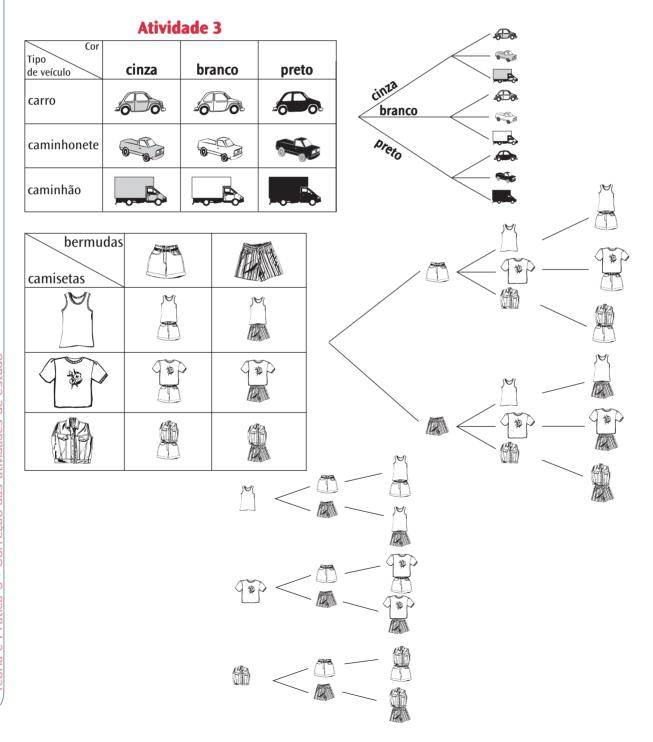
Resposta pessoal. Uma possível resposta: Em cada canto do terreno representado abaixo, foram plantadas 3 árvores. Quantas árvores foram plantadas no terreno?

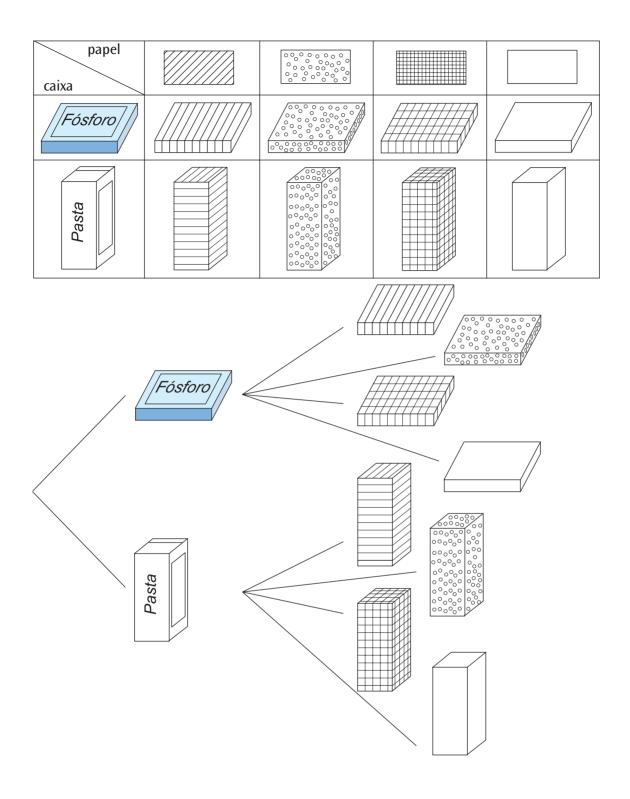


#### **Atividade 2**

**Problema 1** aspecto combinatório, pois forma todos os pares de resultados obtidos no dado branco e no vermelho. Assim, para *cada um* dos 6 resultados obtidos no dado branco, posso obter 6 resultados no vermelho, de modo que ao todo tenho 6 x 6 pares de resultados diferentes.

**Problema 2** adição de parcelas iguais, em que 12 faz o papel de operador, isto é, o 12 representa a quantidade de agrupamentos de 7 livros.





#### **Atividade 4**

Resposta pessoal, de acordo com as situações apresentadas no texto.

#### **Atividade 5**

Resposta pessoal, de acordo com o problema proposto na atividade 4ª e também com as situações apresentadas no texto.

#### **Atividade 6**

Resposta pessoal. Uma possível resposta:

*Idéia combinatória:* Com 4 cores diferentes de cabelo e tecidos de vários tipos conseguiu-se produzir todos os 20 tipos distintos de bonecas, sendo cada uma com uma cor de cabelo e um tipo de tecido. Quantos tipos de tecidos foram utilizados nessa produção?

*Configuração retangular:* João construiu um muro, empilhando 12 fileiras de tijolos. Como gastou 84 tijolos, quantos tijolos João colocou em cada fileira?

# Unidade 2 - Seção 2

#### **Atividade 7**

Resposta pessoal.

Caso você tenha sugerido um dominó do tipo 4x9 3x7 2x5 3x4 36 12 21 10 e outras figuras, é interessante fazer com que as crianças analisem as regras do jogo, joguem e, ao final, construam seu próprio dominó com os fatos fundamentais da multiplicação que mais lhe interessam.



36	21	740
15	12	18
8	16	6





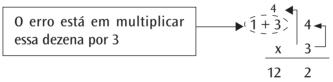
#### **Atividade 8**

Resposta pessoal.

#### Atividade 9

Resposta pessoal. Uma possível resposta:

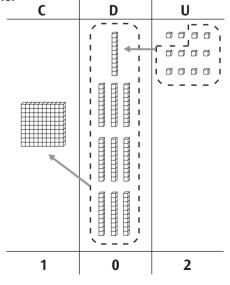
Provavelmente o aluno efetuou 3 x 34 assim:



Nesse caso, ele transferiu indevidamente o que conhece sobre o algoritmo da adição para o da multiplicação.

É possível que esse erro (muito comum) seja devido ao fato de a criança não ter trabalhado a multiplicação com material concreto, antes do algoritmo.

No ábaco, com Material Dourado, teríamos o seguinte:



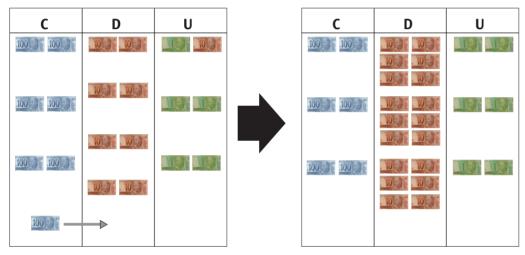
#### **Atividade 10**

Uma possível resposta:

8	5	4	25
- 2	5	0	10
6	0	4	10 +
- 2	5	0	10
3	5	4	_ 4
- 2	5	0	34
1	0	4	
- 1	0	0	
		4	

#### **Atividade 11**

Uma possível resposta:



Assim, 786:3=262

#### **Atividade 12**

#### 1a) Tabuada

2ª) 8 centenas dividido por 18 dá 0 centenas. Troco 8 centenas por 80 dezenas e junto com 9 dezenas, obtendo 89 dezenas. Como 89 está próximo de 90 e 18 está próximo de 20, então 90 dividido por 20 dá 4. Então, 89 dividido por 18 dá mais ou menos 4.

Troco 17 dezenas por 170 unidades e junto com as 4 unidades restantes obtendo 174, que é próximo de 180, como 18 é próximo de 20; 180 dividido por 20 dá 9. Então, 174 dividido por 18 dá próximo de 9.

#### Lição de Casa da unidade 2

Resposta pessoal.

# Unidade 3 - Seção 1

#### **Atividade 1**

- a) 33 alunos.
- b) No trabalho de casa e no trabalho em grupo mais da metade dos alunos teve desempenho Bom. Em nenhum tipo de trabalho mais da metade dos alunos teve desempenho Regular.

#### **Atividade 2**

Resposta pessoal.

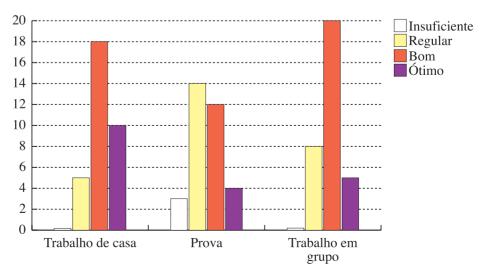
#### **Atividade 3**

Possíveis perguntas:

- que sabor de sorvete é o preferido pelos alunos?
- que tipo de sorvete é o preferido pelos alunos?
- qual é o sorvete preferido pelos alunos?
- quantos alunos foram pesquisados?
- que parte do total dos alunos pesquisados representa aqueles que preferem picolé de chocolate? E os de casquinha de morango?

#### Atividade 4

Resposta pessoal. Uma possível resposta:



#### Unidade 3 - Seção 2

#### **Atividade 5**

#### Situação 1:

- a) Mais meninos, pois 108 é maior que 72. Comparação de números naturais.
- b) A diferença é 36. Subtração de números naturais.
- c) Vôlei. Comparação de números naturais.
- d) Pelos meninos, futebol. Pelas meninas, vôlei. Comparação de números naturais.
- e) 4 times de futebol, sobram 4 alunos para reserva. Divisão de números naturais.
- f) 6 times, sobram 4 meninas para reserva. Divisão de números naturais.

#### Situação 2:

Em todas as questões foi feita a leitura e interpretação do gráfico.

- a) Dezembro. Comparação de números naturais.
- b) Todos os meses, exceto julho. Comparação de números naturais.
- c) Em julho, talvez por ser um mês de férias na escola. Comparação de números naturais.
- d) O consumo foi igual nos dois semestres. A diferença foi de 0 litros. As operações efetuadas foram: adição e subtração.
- e) A escola não conseguiu o desconto, pois consumiu 156.000 litros de água no ano de 1999. Adição e comparação de números naturais.
- f) O consumo médio foi de 13.000 litros por mês. Adição e divisão de números naturais.

#### **Atividade 6**

Resposta pessoal.

#### Atividade 7

Resposta pessoal.

#### Sugestões:

a) Em uma classe, uma professora quer montar equipes de 6 alunos para uma atividade. Ela pode organizar a seguinte tabela:

Quantidade de equipes formadas	Total de alunos que irão participar
1	6
2	12
3	18
•	
•	

Quantos alunos participarão da atividade se houver 6 equipes? E se forem 8 equipes?

b) Em um jogo, cada participante ganha uma ficha amarela por ponto obtido. Cada 4 fichas amarelas podem ser trocadas por 1 ficha verde.

Assim, pode-se organizar a tabela:

Total de fichas verdes	Total de fichas amarelas (ou total de pontos)	
1	4	
2	8	
3	12	
4	16	
•		

Quantos pontos tem o aluno que está com 8 fichas verdes?

Quantas fichas verdes tem o aluno que fez 60 pontos?

#### **Atividade 8**

Nos problemas 2 e 3 não estão presente a proporcionalidade direta. O quadro abaixo resume uma discussão sobre eles.

Problema	Grandezas envolvidas que variam	Resolução	Verificação da não proporcionalidade direta
2	Número de cadernos e despesa	11,00 – 7,00 = 4,00 -> preço de 2 cadernos 4,00 : 2 = 2,00 -> preço de 1 caderno 7,00 – 2 x 2,00 = 3,00 -> preço de 1 caixa de lápis de cor 1 x 3,00 + 10 x 2,00 = 23,00 -> preço do pacote com 1 caixa de lápis e 10 cadernos	7,00÷2 • 11,00÷4• • 15,00÷6 • 23,00÷10
3	Número de pés de alface e despesa	1 pé -> R\$ 0,70 2 pés -> R\$ 1,00 4 pés -> R\$ 2 x 1,00 + 0,70 = 2, 70	0,70÷1 • 1,00÷2 • 2,70÷4

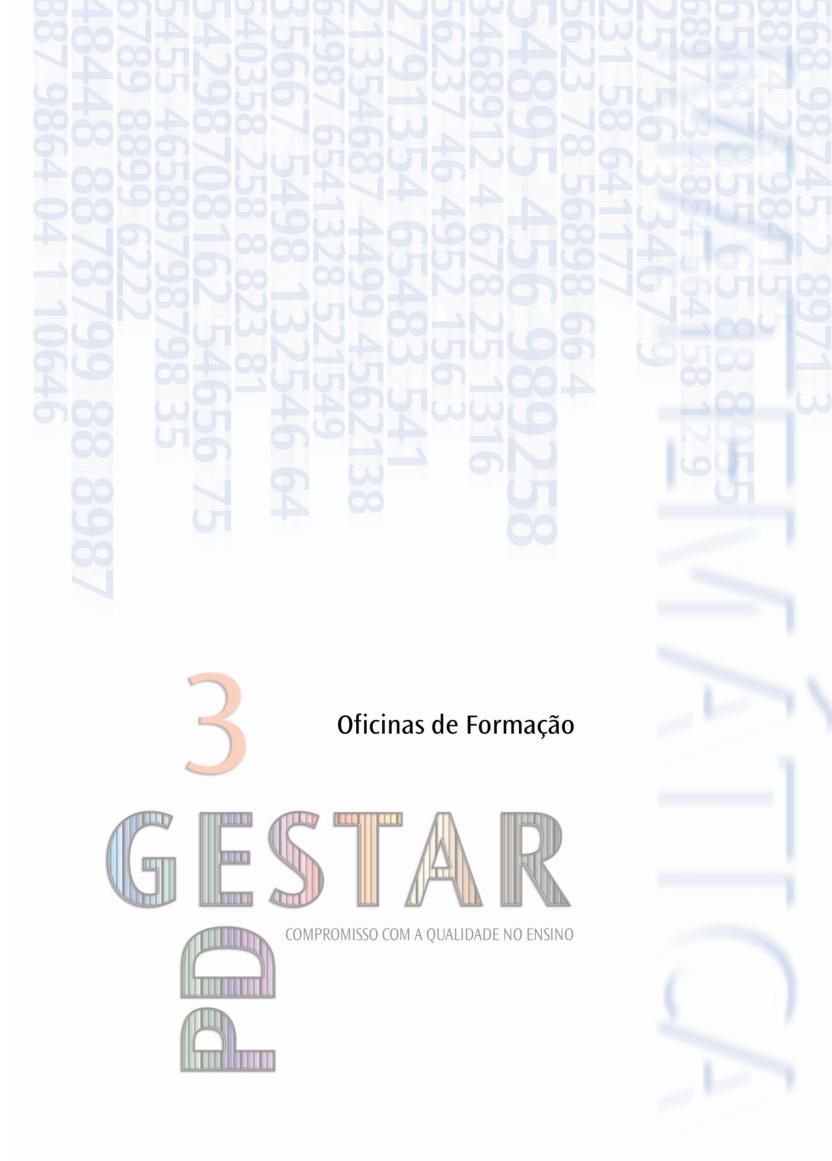
#### **Atividade 9**

Nessas situações,

- 1) a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais;
- 2) comprimento e a despesa são grandezas diretamente proporcionais;
- 3) o número de operários e o tempo são grandezas inversamente proporcionais;
- 4) despesa e número de refrigerantes não são grandezas direta nem inversamente proporcionais; despesa e número de cachorros-quentes consumidos não são direta nem inversamente proporcionais. No 4º dia a pessoa gastará R\$ 9,00.

#### Lição de Casa da unidade 3

Resposta pessoal.





# Operações com números naturais

**Atividade:** Sessão Presencial Introdutória (1 h)



#### Professor,

Só conhecer os números, não basta; é preciso saber operar com eles e, mais ainda, saber quando efetuar essa ou aquela operação para resolver problemas.

Você terá a oportunidade de refletir sobre o significado das operações com os números naturais, sobre o modo como elas se relacionam e o que deve ser levado em conta ao desenvolver um bom trabalho em sala de aula.

Para tanto, você iniciará esta oficina trabalhando individualmente para, em seguida, juntamente com 2 ou 3 colegas, socializar respostas e considerações pessoais, de forma que o grupo possa se posicionar de modo consensual em relação aos principais aspectos envolvidos nas atividades propostas.

## **ATIVIDADE 1**

## 1ª Etapa (Individualmente)

No Quadro 1, abaixo, você encontrará nove problemas. Cada um deles descreve uma situação. Depois de examiná-los, responda às perguntas de **a** a **c**.

# Quadro 1

A-João colocou 5 fichas numa urna vazia e Maria colo- cou 7. Com quantas fichas ficou a urna?	<b>B</b> - Numa urna contendo algumas fichas pretas, João colocou 3 fichas brancas. Em seguida, verificou que na urna ficaram 5 fichas. Quantas fichas pretas havia na urna inicialmente?	C - João colocou fichas brancas numa urna vazia e Maria colocou 5 fichas pretas, de modo que na urna ficaram 8 fichas. Quantas fichas João colocou na urna?
<b>D</b> - Paulo entrou num jogo com 6 figurinhas. Durante o jogo, ganhou 3 figurinhas. Com quantas figurinhas Paulo saiu do jogo?	E - Paulo entrou num jogo com 3 figurinhas e, ao fi- nal, estava com 8. Quantas figurinhas Paulo ganhou no jogo?	F - Durante um jogo Paulo ganhou 4 figurinhas. Ao final, saiu do jogo com 7. Com quantas figurinhas Paulo entrou no jogo?
<b>G</b> - Marta retirou 5 lápis de uma caixa e lá ficaram 3. Quantos lápis havia na caixa inicialmen- te?	<b>H</b> - De uma caixa com 6 lápis, Marta tirou 2. Quantos lá- pis ficaram na caixa?	I - Marta retirou alguns lápis de uma caixa com 8 lápis. Quantos lápis Marta retirou da caixa se lá ficaram 5?

1) Identifique que operação você faria para resolver cada um dos problemas e como a registraria. Escreva sua resposta no Quadro 2 (abaixo) como foi feito com o problema G.

## Quadro 2

A Operação: Registro:	B Operação: Registro:	C Operação: Registro:
D Operação: Registro:	E Operação: Registro:	F Operação: Registro:
G Operação: Registro:	H Operação: Registro:	l Operação: Registro:

2)	No quadro	1, o	que	têm	em	comum	os	problemas	de	uma	mesm	ıa
	linha?											

- A, B, C: \_\_\_\_\_
- D, E, F: \_\_\_\_\_
- G, H, I: \_\_\_\_\_

- 3) Chame de situação aditiva aquela em que a idéia é de juntar ou acrescentar, e de situação subtrativa aquela em que a idéia é de tirar, comparar ou completar.
- 3a) No quadro 2, registre se cada situação apresentada nos problemas é aditiva ou subtrativa.
  - 3b) Algum dos problemas do quadro 1 veicula a idéia de comparar quantidades? E a idéia de completar? Justifique sua resposta.

## **ATIVIDADE 2**

#### Trabalho em pequenos grupos

Compare e discuta com seus colegas as respostas e considerações feitas na atividade 1.

A seguir, o grupo deverá se posicionar a favor ou contra as afirmações contidas em cada quadro, justificando seu posicionamento.

Todos os problemas que descrevem uma situação aditiva são resolvidos por meio de uma adição e os que envolvem uma situação subtrativa são, necessariamente, resolvidos com uma subtração.

2)

Ao resolver o problema E do quadro 1, um aluno partiu das 3 figurinhas e foi acrescentando novas figurinhas até chegar a 8.

situaç	ão aditiv	•	do uma	estratégi	a E, que de a aditiva p itagem.	

	-			vem situaçõ característic	•
tes:	enquanto o	s três prime	iros problen	nas veiculam	a idéia de
junt	ar, nos três ί	íltimos a idé	ia é de acres	scentar.	

## **ATIVIDADE 3**

## Trabalho no grande grupo

A partir da atividade realizada individualmente e das discussões feitas em pequenos grupos, o grande grupo vai discutir as respostas dadas anteriormente e elaborar uma conclusão sobre esse trabalho.

Registre a	aqui essa conclusão

## 2ª Etapa (Trabalho em pequenos grupos)

Nos procedimentos usuais de cálculo na adição e uma subtração operase sempre da direita para a esquerda, isto é, opera-se primeiro com os algarismos da ordem das unidades, depois com os das dezenas, das centenas e assim por diante. Na verdade, isso é puramente convencional.

Vamos inverter esse sentido?

1. Experimente efetuar a seguinte operação da esquerda para a direita. Registre seu procedimento da maneira que achar mais conveniente.

2.	Você utilizou, em algum momento, as regras do SND como agrupa- mentos e trocas na base10? Quando?
3.	Faça uma lista dos conhecimentos utilizados para efetuar as opera- ções sugeridas anteriormente.

Parece que conhecer bem as regras do SND facilita muito os procedimentos de cálculo, não é? Mesmo assim, deve ter sido difícil para você dar conta da tarefa 1).

Oficina de Formação de Professores • TP3 • Sessão Introdutória

4. Experimente agora, com o uso o Material Dourado, efetuar 854 -197, da esquerda para a direita.

Registre aqui o que você fez com o material e com os algarismos.

Com o material	Com os algarismos

5.	Compare os procedimentos utilizados para efetuar 854-197 nas questões 1 e 4. Qual você considera mais fácil? Por quê?

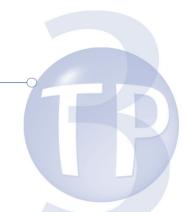
Professor, para o aluno aprender a operar com números naturais de qualquer ordem de grandeza, o uso de material concreto favorece a compreensão dos procedimentos usuais de cálculo e seu registro devendo, por-



## Operações com números naturais

Atividade: Sessão Presencial Semanal (2 h)

Unidade 1: Adição e subtração de números naturais



#### **Professor**

A unidade 1 leva a uma reflexão sobre um dos temas mais trabalhados no Ensino Fundamental, em Matemática: a adição e subtração de números naturais.

Ao tratá-lo, procurou-se enfatizar dois aspectos importantes:

- a análise dos problemas aditivos e subtrativos e as idéias que eles veiculam;
- o tratamento dado às técnicas operatórias (usualmente empregadas nos livros didáticos e nas escolas), de modo a torná-las significativas para os alunos.

## 1ª Etapa (Trabalho individual)

Nessa etapa da atividade, pretende-se propiciar condições para a análise de algumas situações didáticas e a troca de experiências com seus colegas sobre o tema.

A seguir, você encontra algumas situações de jogos com palitos, realizados por crianças que estão iniciando seu curso no Ensino Fundamental.

## Quadro 1

#### Situação 1

Socorro tinha 5 palitos e, em seguida, obteve outros 4. Quantos ela tem agora?

#### Situação 2

José tinha uma certa quantidade de palitos. Perdeu 3 e agora tem 8. Quantos palitos José possuía inicialmente?

#### Situação 3

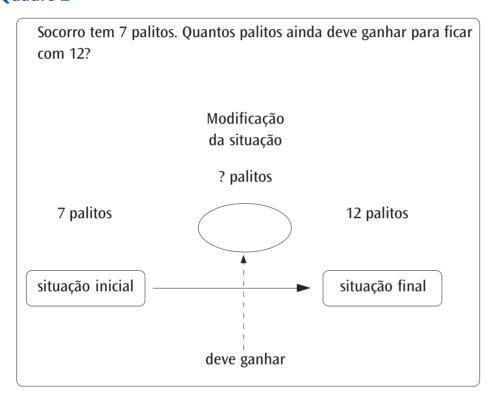
Genilson tinha 6 palitos. Ganhou alguns e agora tem 10. Quantos palitos Genilson ganhou?

Para cada uma das situações do quadro anterior, você deverá realizar algumas atividades.

- a) Responda em seu caderno: como você imagina que as crianças resolveriam cada uma das questões propostas?
- b) Classifique cada situação como "situação aditiva" ou "situação subtrativa".

Observe a seguinte situação-problema no Quadro 2 e o esquema que a representa para resolver a proposta seguinte.

## Quadro 2



c) Agora, use esse mesmo tipo de esquema para representar cada uma das situações do quadro 1.

Para resolver a situação descrita no quadro 2, podem surgir diferentes estratégias, como as descritas no Quadro 3.

# Quadro 3

	chegar aos 12 palitos.
	operação usada: 7 + =12
	ALUNO Y: de 12 palitos, tirou os 7 iniciais, chegando ao total de palitos que Socorro deve ganhar.  operação usada: 12 – 7 =
	ode-se concluir que, embora a situação apresentada no quadro 2 seja atureza aditiva, ela pode ser resolvida por estratégias diferentes:
•	o ALUNO X usou uma estratégia aditiva;
•	o ALUNO Y usou uma estratégia subtrativa.
d)	Descreva o tipo de estratégia que você usou para resolver cada uma das situações apresentadas no quadro 1.
e)	Crie uma situação aditiva, que possa ser resolvida por uma estratégia subtrativa. Represente-a por meio de um esquema (como o do quadro 2).
f)	Agora, responda: o que você pode concluir a respeito das situações que envolvem adições ou subtrações e da maneira de tratá-las em sala de aula?

ALUNO X: partindo dos 7 palitos, foi acrescentando novos palitos, até

Todas as suas respostas, bem como aspectos a serem esclarecidos, devem ser anotados por você para serem trabalhados por meio de uma discussão geral com todos os seus colegas e o formador, ao final das três etapas.

## 2ª Etapa (Trabalho em duplas)

A seguir, serão apresentados exemplos de algumas situações nas quais:

- apoiando-se na manipulação de material concreto, os alunos irão compor e decompor quantidades;
- usando agrupamentos e trocas na base 10, irão vivenciar as estratégias que permitem justificar as técnicas operatórias da adição e da subtração, usualmente empregadas (tanto nos livros didáticos, quanto nas escolas).

Resolva cada uma das situações, registrando em seu caderno as soluções encontradas.

## Situação 1

Em uma caixa, há muitas notas de dinheiro, separadas pelo seu valor, conforme figura:



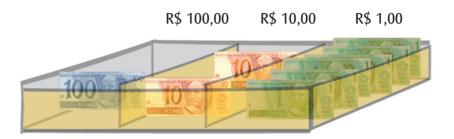
Complete a tabela, indicando, em cada linha, a quantidade de notas de cada tipo que devem ser retiradas da caixa para compor a quantia de **R\$ 126,00**.

Tipos de	R\$ 100,00	R\$ 50,00	R\$ 10,00	R\$ 5,00	R\$ 1,00
notas					
Quantidade					
total de notas					
8 notas					
6 notas					
A maior possível					
A menor possível					

# Situação 2

Usando **apenas** notas de R\$ 1,00; R\$10,00; R\$100,00, resolva os seguintes problemas, representando o resultado de cada um deles com a **menor quantidade possível de notas.** 

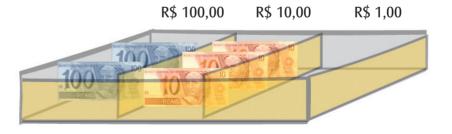
a) Josias está guardando suas economias. Ele já tem, em uma caixa, R\$126,00 organizados como na figura:



Josias quer guardar mais R\$ 37,00, economizadas no último mês.

- como ficará organizada a caixa agora?
- qual o total economizado por Josias?

b) No mês de setembro, Josias tinha, em sua caixa, R\$230,00, organizados como na figura:



Ele quis dar R\$ 18,00 para seu irmão.

- O que ele deve fazer com o dinheiro de sua caixa, para dar a quantia de seu irmão?
- Como ficou organizada a caixa, depois que ele deu o dinheiro ao irmão?
- Que total sobrou para Josias?

## 3ª Etapa

Manipulando o dinheiro, seus alunos estarão encontrando os resultados de:

- uma adição com reserva ("vai 1") em a) da situação 2;
- uma subtração com recurso à ordem superior ("empresta 1") em b) da situação 2.

bele	ue procedimentos didáticos você pode usar para que seus alunos esta- am a relação entre as ações realizadas e o seu registro, ao fazer suas
"con	as" usuais?
-	
-	
-	

Ao final dos trabalhos, os grupos deverão se reunir, para discutirem as soluções das situações vivenciadas, apresentando:

- diferenças e semelhanças entre elas, identificando as que são trabalhadas em suas aulas;
- aspectos dessas situações didáticas que poderão ser adotados pelo professor.



## Operações com números naturais

Atividade: Sessão Presencial Semanal (2 h)

Unidade 2: Multiplicação e divisão de números naturais



Professor,

Analisando a unidade 2 (seção 1) do TP3 você pôde refletir sobre o uso das operações multiplicação e divisão em que diferentes situações-problema foram utilizadas para apresentar modos de resolver cada uma delas.

Você refletiu, também, sobre o importante papel da representação de uma situação problema como estratégia de apoio ao raciocínio da criança no momento em que ela deve decidir qual operação resolve aquela determinada situação. Percebeu a importância adquirida pelos diferentes materiais de manipulação, ilustrações, esquemas, etc na representação das situações propostas.

Esse mesmo tema será retomado nessa sessão em duas partes, por etapas.

## PARTE 1

## 1ª etapa (individual)

A seguir, apresentaremos algumas situações-problema, que usualmente são propostas a alunos do Ensino Fundamental. Você deverá:

- analisar essas situações, decidindo para que nível de aprendizagem elas são mais adequadas;
- criar para cada uma dessas situações, uma representação considerada por você como um bom apoio ao raciocínio dos alunos.

## Situação 1

Uma gincana esportiva está sendo realizada em duas fases. Cada participante deverá se inscrever em uma só modalidade esportiva para cada fase, obedecendo a tabela:

1° fase	2ª fase
natação	saltos de altura
corrida	arremesso de dardo
ciclismo	_ )

Jonas gosta e pratica todos os esportes oferecidos.

Assim, quantos tipos de escolhas diferentes ele poderá fazer, para decidir em quais modalidades se inscreverá na gincana?

## Situação 2

Silmara coleciona fotografias 3 por 4 (3x4) de seus amigos. Ela resolveu formar um painel com todas as fotos que já tem, colocando-as em uma folha de papel ofício (ou sulfite). Formou 5 linhas, com 4 fotos por linha. Quantas fotos ela já tem?

## Situação 3

Dona Francisca está tomando um remédio. O médico receitou 3 cápsulas por dia, a serem tomadas durante 6 dias. O vidro de remédio tem 20 cápsulas. Esse vidro tem cápsulas suficientes para os 6 dias?

## Situação 4

Josemar tem 36 bolinhas de vidro e quer guardá-las em 4 caixinhas, colocando quantidades iguais de bolinhas em todas elas. Como ficará a arrumação?

## Situação 5

Uma caixa tem 60 lápis. Se quisermos guardar 5 lápis em cada estojo, quantos estojos poderão ser organizados?

## 2' Etapa

Agora, você deve se reunir com um colega, de modo que possam comparar suas soluções e escolher as mais adequadas, registrando-as.

## 3ª Etapa

Para finalizar a atividade, todas as duplas deverão estar preparadas para apresentarem e discutirem suas respostas.

#### PARTE 2

Nesta 2ª parte, retornaremos as idéias trabalhadas na Unidade 2 – seção 2, em que se procura enfatizar a importância de justificar cada uma das técnicas operatórias usualmente utilizadas para multiplicar ou dividir números naturais, em especial, a divisão.

Pretende-se, com isso, levar os alunos a compreenderem o que é fundamental observar em qualquer uma dessas operações — o processo de agrupamento e de trocas na base 10, o uso de registros, de modo a respeitar o valor posicional dos algarismos.

Para isso, será retomado o material de manipulação, já usado na oficina anterior: a caixa de dinheiro, com notas de R\$1,00; R\$ 10,00; R\$ 100,00.

É importante que você manipule esse material, como seus alunos o farão, pois assim perceberá melhor as facilidades e/ou dificuldades que terão, quando realizarem esse tipo de atividade.

## 1ª Etapa

Em dupla com um colega e usando notas de "dinheiro" e um "ábaco de papel", conforme anexo, você deverá:

• Resolver as situações 1 e 2, manipulando o material citado.

## Situação 1

Josias está economizando R\$ 201,00 por mês.

No fim de 5 meses, ele foi organizar sua "caixa de dinheiro", usando a menor quantidade possível de notas.

Como ficou a caixa, se no início ela estava vazia?

Quanto Josias economizou?

•	Depois de resolver a Situação 1, com o "dinheiro", responda às ques-
	tões:

a) Qual é o papel do zero, na representação da quantidade 201?

b) Que propriedade(s) da multiplicação de números naturais é (são) fundamental(is) na técnica operatória convencional?

c) Em que momento(s) da multiplicação você usou os agrupamentos e trocas na base 10?

# Situação 2

Conservando a mesma dupla, você deverá resolver a situação 2, manipulando o material.

Josias comprou uma geladeira no valor de 1 107,00 reais. Ele tem esse dinheiro, mas resolveu pagar em 9 parcelas iguais, pois não haveria acréscimo.

Josias resolveu organizar o dinheiro em sua caixa, separando-o nas 9 partes iguais.

Como ficou a caixa de Josias, se ele só colocou 1 107 reais nela?

Qual o valor da prestação?

Depois de resolver a Situação	o 2, responda às três questões segui	ntes

a) Que propriedade(s) da divisão de números naturais é(são) fundamental(is) na técnica operatória convencional?

b) No algoritmo 1107, como você explica a situação: "(1 unidade de milhar) : 9"?

c) Em que momento(s) da divisão você usou os agrupamentos e trocas?

## 2ª Etapa

Tendo todas as duplas terminado o trabalho, uma delas irá apresentar suas soluções para as demais duplas.

Anote todas as suas dúvidas e sugestões, para apresentá-las na discussão geral, que será feita a seguir.

**Obs**.: Professor garanta que seu grupo, na próxima oficina, disponha de: tesoura, cola, pincel mágico, um pedaço de barbante de 2m de comprimento, 1 folha de papel sulfite.



## Operações com números naturais

Atividade: Sessão Presencial Semanal (2 h)

Unidade 3: Operações com números naturais e o tratamento da Informação

Professor,

Na Unidade 3, ao trabalhar com a multiplicação e divisão, você refletiu sobre um tema que, embora bastante enfatizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, não têm sido trabalhado no 10 e 20 ciclos do Ensino Fundamental: a proporcionalidade.

A partir da leitura desta Unidade, você deve ter observado como o tema "proporcionalidade" é favorecido pela organização e análise dos dados, sob forma de tabelas e gráficos.

Nesta oficina pretende-se propiciar condições para que você vivencie algumas situações didáticas ligadas ao tema "proporcionalidade", de modo a prepará-lo para planejar outras, que sejam significativas para seus alunos.

## 1ª ETAPA

Para realizar as atividades que compõem a 1ª Etapa, você e seus colegas deverão se organizar em grupos (de quatro participantes, se possível).

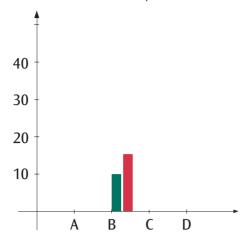
#### **Atividade 1**

A atividade 1 consta dos 6 momentos, conforme destacados abaixo.

- 1. Vocês deverão colorir, com pincel mágico, o pedaço de barbante que trouxeram para a atividade.
- 2. Tendo em mãos os quatro pedaços de barbante, fornecidos pelo seu formador, você e seu grupo deverão cortar, do barbante colorido, outros quatro pedaços. Cada um dos novos pedaços deverá ter um comprimento que seja uma vez e meia o comprimento de cada pedaço inicial (fornecido pelo professor).

Oficina de Formação de Professores • TP3 • Unidade 3

3. Marque eixos na folha de papel ofício, como o modelo: (as medidas reais devem ser em centímetros).



4. Cole os dois pedaços de barbante correspondentes (o branco e o colorido que tem uma vez e meia o comprimento do branco) em cada posição A, B, C, D, conforme modelo anterior. Responda:

•	que regularidades	você observa	nesse	gráfico?
	que regularidades			g. aco.

5. Com a régua, meça todos os pedaços de barbante preenchendo, na tabela, os comprimentos em A, B, C, e D.

	Comprimento (cm)		
Tipo	branco	colorido	
Posição			
A			
В			
С			
D			
Nova (E)	30		
Nova (F)		60	

- 6. Observando os valores da tabela, responda:
  - a) Que regularidades você observa?

~
(*
Unidade
τ
ď
τ
•
2
-
_
Т
N
t.
Λ
ш
┕
· 103
_
۰
Drofessores
4
,
-
С
-77
V
- 11
×
.u
4
-
7
÷
Δ
_
4
Q
7
•
C
off
-11
C
ď
Formacão de
- 5
2
-
-
·
ш
A
U
7
4
_
π
-
÷
t
,>
-
7
Officina

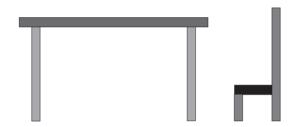
Q

	b) Como você pode calcular os valores que estão faltando?
Ativi	idade 2
Ag ma:	ora, você e seu grupo deverão resolver as seguintes situações-proble-
1.	"Sopa de cebola"
	ma cozinheira achou duas receitas de sopa, nas quais havia, entre es, os seguintes ingredientes:
1 <sup>a</sup>	sopa: 3 cebolas, 4 colheres de farinha de trigo, 2 litros de água.
2 <sup>a</sup>	sopa: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha de trigo, 3 litros de água.
Re	esponda:
a)	as quantidades de produtos de uma receita devem ser sempre iguais para produzirem o mesmo tipo de sopa?
b)	as duas receitas podem produzir o mesmo tipo de sopa?
	-
c)	por qual número foram multiplicados os números da 1ª receita para encontrarmos os números da 2ª?

d)	se um cozinheiro usar 5 cebolas para 4 litros de água, a sopa obtidaterá mais gosto de cebola (ou menos) que a sopa da 1ª receita?	a

#### 2. "Os móveis"

Na planta a seguir, estão representados alguns móveis de um catálogo da loja "Doce lar". Tire as medidas da planta e complete a tabela, levando em conta o que foi feito na 1ª linha da tabela.



	NA PLANTA	NA REALIDADE
Altura da mesa	2,5 cm	50 cm
Comprimento da mesa		
Altura da cadeira		
Altura do assento da cadeira		

## 3. "A vaquinha na classe"

Os formandos do Ensino Fundamental resolveram fazer uma "vaquinha" para comprar comida e bebida para fazer uma confraternização com todos os alunos de suas classes.

Eles calcularam que, se fizessem uma despesa de R\$120,00 e todos os alunos da classe contribuíssem, cada um deveria pagar R\$3,00.

Faça uma tabela para responder:

• se apenas a metade da turma resolver contribuir, qual a quantia que cada um deverá pagar?

0

 se os alunos que resolverem contribuir forem 30, quanto cada um pagará?

#### 4. "As fileiras do auditório"

Um auditório está organizado em 18 filas de 20 poltronas em cada fila.

Para a realização de uma palestra, resolveram arrumar o mesmo número de poltronas, organizando-as em apenas 12 filas.

#### Responda:

- a) quantas poltronas ficarão, agora, em cada fila?
- b) aumentando o número de filas, o total de poltronas por fila deverá aumentar ou diminuir?
- c) se quisermos colocar 40 poltronas por fila, quantas filas formaremos?

## 2ª ETAPA

Para esta etapa, serão formados novos grupos, tendo um representante de cada um dos outros grupos inicialmente formados.

Esta 2<sup>a</sup> etapa envolve 2 atividades.

## Atividade 1 (em grupo)

Apresentação e discussão das soluções encontradas pelos participantes dos grupos anteriores e elaboração das sínteses.

## Atividade 2 (em grupo)

gι	uintes questões:
•	cada uma das situações apresentadas nas Atividades 1 e 2 envolve a proporcionalidade direta ou inversa entre as grandezas. Indi- que, em cada situação, o tipo de proporcionalidade envolvida;
•	o que caracteriza as variações de valores de duas grandezas dire-
	tamente proporcionais? E das inversamente proporcionais?
•	sempre que há relação entre duas grandezas, isso significa serem elas diretamente ou inversamente proporcionais?

a) Discutidas as soluções encontradas anteriormente, respondam às se-

## 3<sup>a</sup> ETAPA

Todo o grupo de professores deverá discutir a:

 afirmação do PCN-Matemática: "O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real."





# Anexo 1 - Oficina de Formação de Professores















































	3		
1	2	6	5
			4

# PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR I

#### **DIPRO / FNDE / MEC**

#### CONSULTORES DAS ÁREAS TEMÁTICAS

#### Língua Portuguesa

Maria Antonieta Antunes Cunha

Doutora em Letras - Língua Portuguesa Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG

Professora Adjunta Aposentada - Língua Portuguesa - Faculdade de Letras Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG

#### Matemática

Cristiano Alberto Muniz

Doutor em Ciência da Educação Universidade Paris XIII

Professor Adjunto - Educação Matemática - Faculdade de Educação Universidade de Brasília/UnB

Nilza Eigenheer Bertoni

Mestre em Matemática Universidade de Brasília/UnB

Professora Assistente Aposentada - Departamento de Matemática Universidade de Brasília/UnB

# PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR GESTAR I

#### **DIPRO / FNDE / MEC**

#### Diretora de Assistência a Programas Especiais - DIPRO

Ivone Maria Elias Moreyra

## Chefe da Divisão de Formulação e Implementação - DIFIM

Débora Moraes Correia

#### **EQUIPE EDITORIAL**

#### Assessoria Pedagógica

Maria Umbelina Caiafa Salgado Consultora - DIPRO/FNDE/MEC

#### Coordenação Geral

Suzete Scramim Rigo - IQE

#### Coordenação Pedagógica

Regina Maria F. Elero Ivamoto - IQE

#### Elaboração

Marília Barros Almeida Toledo - Matemática - IQE
Suzana Laino Cândido - Matemática - IQE
Maria Valíria Aderson de Mello Vargas - Língua Portuguesa - IQE
Kahori Miyasato - Língua Portuguesa - IQE

#### **Equipe de Apoio Técnico**

Marcelina da Graça S. Peixoto - IQE Maria Christina Salerno dos Santos - IQE

#### Produção Editorial

Instituto Qualidade no Ensino - IQE