Capítulo 1

Álgebra

Professor de Matemática cria confusão em campeonato de futebol

Adaptado do artigo de
Manoel Henrique C. Botelho

Numa próspera cidade do interior de São Paulo, o prefeito, querendo justificar a necessidade de uma Secretaria de Esportes (dizia-se para poder nomear um primo de sua esposa), decidiu implantar um campeonato de futebol.

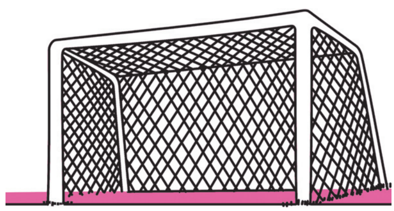
Como não tivesse infra-estrutura administrativa para organizar o torneio, solicitou ao colégio estadual da cidade que organizasse o evento, já que o colégio tinha dois professores de Educação Física. Ambos os professores aceitaram a incumbência, desde que os demais membros do corpo docente participassem. O fato é que algo de contagiante aconteceu, e todos os professores se empolgaram com o torneio.

A professora de Música adaptou um velho hino para o hino do torneio. A professora de Filosofia criou o código de ética do competidor e, como o professor de Matemática também queria colaborar, pediu-se para fazer o regulamento da escolha do vencedor.

Além de estabelecer os critérios gerais de classificação e desclassificação, era necessário também estabelecer o critério de desempate, em caso de dois times ficarem no final da disputa com o mesmo número de pontos ganhos. Era preciso, neste caso, um critério de decisão. Decidir por saldo de gols era perigoso, pois poderia haver uma "peruada à la argentina". Decidir por pênaltis era complicado, pela própria complexidade da cobrança, em face da famosa movimentação do goleiro antes de cobrar a falta ou da famosa paradinha criada pelo Rei Pelé, que só chuta depois que o goleiro se desloca para um lado. Como esses critérios são sempre passíveis de interpretação, e como tribunal de futebol de várzea costuma ser o tapa, decidiu-se adotar um critério muito usado em campeonatos estaduais e nacionais de futebol profissional: se, no final do campeonato, dois times estiverem com o mesmo número de pontos ganhos, o campeão será o time com maior número de vitórias. O professor de Matemática ouviu as recomendações, fez a minuta do regulamento e apresentou-o à Comissão Organizadora. Esta, por falta de tempo (eterna desculpa de nós brasileiros), aprovou tudo sem ler, em confiança!

O Campeonato começou e, no seu desenrolar, dois times se destacaram: o Heróis do Minho (que – dizem, mas nunca foi provado – era financiado por um português, dono da maior padaria do lugar), e o Flor da Mocidade, que representava um bairro pobre do arrabalde da cidade. Com o evoluir dos jogos, o Flor da Mocidade passou à frente, e só faltava um jogo no domingo. Para seu único rival, o Heróis do Minho, também só restava um jogo no sábado. Se o Flor da Mocidade vencesse no domingo, seria o campeão pelo maior número de vitórias, mesmo que o Heróis do Minho vencesse no sábado.

E foi o que deu. No sábado, o Heróis do Minho venceu. O estádio encheu, no domingo, para ver a última partida. Se o Flor da Mocidade empatasse ou perdesse, adeus título. Mas, se vencesse, então seria campeão por ter uma vitória a mais que o Heróis do Minho. No esperado domingo não deu outra. No fim do primeiro tempo o



Flor da Mocidade já vencia por três a zero o pobre time Íbis Paulista. Foi aí que o Presidente da Comissão leu o regulamento pela primeira vez. Não se sabe se por engano datilográfíco ou erro do professor de Matemática, o fato é que o regulamento dizia, claramente:

> "se dois times terminarem o campeonato com o mesmo número de pontos ganhos, será campeão o que tiver o maior número de derrotas".

Era isso o que estava escrito, em total desacordo com o combinado. No intervalo do jogo, o Presidente da Comissão pôs a boca no trombone e em cinco minutos todo o estádio, em efervescência, discutia o acontecido e o que iria acontecer em face de tão estranho e heterodoxo regulamento, que, aliás, não obedecia ao combinado.

Resumidamente, assim estavam os ânimos na arena, digo, no estádio:

–desespero no pessoal do Flor da Mocidade, pois mudara a regra do campeonato que, na versão tradicional, lhe garantiria o título;

–alegria no pessoal dos Heróis do Minho, que via uma chance de ser campeão ou de, no mínimo, "melar" o campeonato.

Para resolver esse imbróglio matemático, foi chamado o responsável (ou seria irresponsável?), o professor de Matemática, que felizmente morava perto do estádio.

O professor de Matemática, com uma comissão de alunos, foi até o estádio, que fervia. Metade da torcida queria brigar, qualquer que fosse o resultado. Somente algumas pessoas cuidavam da análise da questão sem partidarismo. Enquanto o professor de Matemática não chegava, a professora de Filosofia, que pelo mestre de Álgebra não tinha simpatia, deu sua contribuição, jogando gasolina na fogueira ao declarar:

"É a primeira vez na história da humanidade que se declara vencedor quem mais perde. Na Grécia antiga, o perdedor era quase humilhado, e em Roma nós sabemos o que eles faziam aos gladiadores que perdiam. Não quero atacar o mestre de Matemática, mas ele criou um regulamento que é, no mínimo, anti-histórico."

Nessa hora chega, sereno, o professor de Matemática, que só aceita discutir o assunto numa sala, diante de um quadro-negro. No seu sagrado "hábitat" o mestre fez o quadro de resultados:

	jogos	empates	vitórias	pontos	derrotas
Flor da Mocidade	14	4	7	18	3
Heróis	14	6	6	18	2

O professor de Matemática explicou:

–Quando dois times jogam o mesmo número de jogos e resultam com o mesmo número de pontos ganhos, obrigatoriamente, e sempre, o time que tiver o maior número de vitórias terá o maior número de derrotas e reciprocamente.

Uma pessoa da Comissão Diretora –que estava com o jornal do dia e que dava a classificação dos times profissionais no Campeonato Brasileiro notou que o fato realmente acontecia. Ou seja, colocar no regulamento a escolha entre dois times com o mesmo número de jogos e o mesmo número de pontos ganhos, pelo critério de maior número de vitórias ou de maior número de derrotas, dá no mesmo.

Todos, ou os que puderam entender, concordaram e o Flor da Mocidade foi consagrado campeão, embora alguns, ou por não haverem entendido, ou por má-fé, dissessem que fora resultado de "tapetão" (resultado jurídico obtido fora do campo).

Passados uns meses, o professor de História perguntou ao professor de Matemática como ele percebera esse fato, correto, mas curioso, de que o campeão é o que mais perde, se comparado com o concorrente com o mesmo número de pontos ganhos. E ouviu a seguinte história, contada em sigilo:

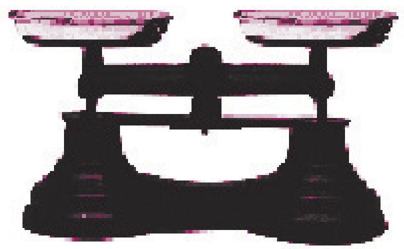
A linda filha do professor de Matemática, que estudava em uma universidade distante, chegou das férias com o coração partido e dividida. Estava perdidamente apaixonada por dois rapazes maravilhosos.

Um deles, Pedro, era jovem e de família de classe média em decadência (o "coitado" era também filho de professor) e o outro, Arthur, de rica e tradicional família pecuarista. A jovem estava dividida quanto a escolher entre um e outro, quando seu pai a orientou:

"Minha filha, para uma pessoa jovem como você, relacionar-se com pessoa desquitada e talvez até com um filho, é sempre um problema."

A menina, aturdida, perguntou ao pai como soube de tudo isso, se ela só conhecera Arthur há quinze dias e na cidade da sua universidade, distante, muito distante da cidade onde morava seu pai. Que seu pai era matemático e fazia raciocínios incríveis, quase dignos de bruxo (opinião dela), ela sabia, mas a Matemática permitiria descobrir problemas amorosos?

O pai respondeu com a simplicidade dos matemáticos:



"Usei o Princípio de Roberval, ou, como dizem os físicos, a Balança de Roberval, aquela de dois pratos iguais. Se você está apaixonada igualmente por duas excelentes pessoas, então os pratos da balança estão equilibrados. Se eles estão equilibrados e surge essa brutal diferença em favor de Arthur, que é o fato de ele ser rico, e isso é uma indiscutível vantagem, então Arthur deve ter, para não desequilibrar a balança, uma grande desvantagem. Como você disse que ele é uma boa pessoa, com boa probabilidade a única desvantagem que ele deve ter é ser desquitado, situação essa não ideal, pelo menos na opinião dos pais de uma moça solteira e tão jovem."

A filha do matemático ficou extasiada com a lógica dedutiva do pai. Anos depois o pai usou essa lógica no regulamento do campeonato. Se dois times empatam, o que tiver maior número de vitórias deve, obrigatoriamente, ter o maior número de derrotas.

Lógico, não?

Quanto perco com a inflação?

Adaptado do artigo de
Manoel Henrique Campos Botelho

Souzinha, apesar de viver em um país que há mais de quarenta anos tem inflação, ainda não conseguiu entendê-la.

Certo dia, falou-me:

–A inflação nos anos subseqüentes ao último aumento (melhor seria dizer reajuste) de salário foi de 8% e 7%. Já perdi com isso

8% + 7% = 15% do meu salário.

Corrigi:

–Não é 15%, é outro valor.

Souzinha respondeu:

–Já sei, já sei.O cálculo exato é

$1,08 \times 1,07 = 1,1556$, ou seja, 15,5%.

–Continua errado, insisti.

Souzinha bateu o pé e saiu murmurando baixinho, mas suficientemente alto para que eu pudesse ouvir:

– O Botelho não tem jeito, está sempre arrumando coisinhas para discutir.

Afinal, quem está certo, Souzinha ou eu?

Resposta

É claro que sou eu que estou certo e Souzinha está errado. Admitamos que Souzinha ganhasse 1000 reais e usasse essa quantia para comprar unicamente produtos de valor unitário 10 reais. Logo, ele compraria, inicialmente, um total de 100 produtos. Se a inflação foi de 8% no primeiro ano e de 7% no ano seguinte, o produto padrão que custava 10 passará a custar $10 \times 1{,}08 \times 1{,}07 = 11{,}556$.

Custando o objeto padrão 11,556 reais, e Souzinha continuando a ganhar 1000 reais, ele poderá comprar $\frac{1000}{11{,}556} \approx 86{,}5$. Logo, a redução da capacidade de compra terá sido de

$$\frac{100-86{,}5}{100} \approx 13{,}5\%.$$

Certo, Souzinha?

Assim, mesmo quando a inflação acumulada for de 100%, o nosso salário não some, mas nosso poder de compra cai 50%.

Vale para 1, 2, 3, ... Vale sempre?

Adaptado do artigo de
Renate Watanabe

*N*este artigo vamos fazer, inicialmente, algumas afirmações sobre números naturais que são verdadeiras para os números 1, 2, 3 e muitos outros e vamos tentar responder à pergunta: elas são verdadeiras sempre?

O objetivo do artigo é enriquecer o estoque de fatos e problemas interessantes que professores colecionam para usar em momentos oportunos nas aulas que ministram.

Verdadeiro ou falso?

Vamos verificar se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

1. $\forall\ n \in N, n < 100$.
2. $\forall\ n \in N, n^2 + n + 41$ é um número primo.
3. $\forall\ n \in N^*, 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.
4. $\forall\ n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.
5. $\forall\ n \in IN^*, 2n + 2$ é a soma de dois números primos.

Vejamos:

1. "$n < 100$" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros, mas torna-se falsa para qualquer número natural maior do que 99.

   Portanto, "$\forall\ n \in IN, n < 100$" é uma sentença *falsa.*

2. "$n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros. De fato, ela é verdadeira para todos os números naturais menores do que 40.

   Porém o número $40^2 + 40 + 41 = 40 . (40 + 1) + 41 = 41^2$.

   41^2 não é primo, mostrando que a sentença

   "$\forall\ n \in N$, $n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma *falsa.*

3. "$991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito", é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, mesmo após muitas e muitas tentativas, não se acha um número que a torne falsa.

   Pudera! O primeiro número natural n, para o qual $991n^2 + 1$ é um quadrado perfeito é um número de 29 algarismos:

   $$12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$$

   e, portanto, a sentença

   "$\forall\ n \in N^*$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito", é *falsa.*

4. "A soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como no caso anterior, após muitas e muitas tentativas, não se acha um número natural que a torne falsa. Neste caso, tal número não existe, pois, como veremos adiante, esta sentença é *verdadeira sempre.*

5. "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como nos dois exemplos anteriores, após muitas e muitas tentativas, não se encontra um número natural que a

torne falsa. Mas agora temos uma situação nova: ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é verdadeira sempre.

A sentença é a famosa conjetura de Goldbach, feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler: "Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos". Não se sabe, até hoje, se esta sentença é verdadeira ou falsa.

Em suma, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontrarmos um contra-exemplo, saberemos que a afirmação não é sempre verdadeira. E se não acharmos um contra-exemplo? Neste caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la, recorrendo ao princípio da indução.

Princípio da indução finita

"Seja S um conjunto de números naturais, com as seguintes propriedades:

1. $0 \in S$
2. se k é um natural e $k \in S$, então $k + 1 \in S$.

Nestas condições, $S = N$".

Vamos ver como esse princípio nos permite demonstrar que a sentença 4 é verdadeira.

"$\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2."

Demonstração

Seja S o conjunto dos números naturais n para os quais a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

1. $1 \in S$, pois a soma do 1 primeiro número ímpar é $1 = 1^2$.
2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k primeiros números ímpares seja k^2.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que a soma dos $k + 1$ primeiros números ímpares é $(k + 1)^2$.

Estamos supondo que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

e queremos provar que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

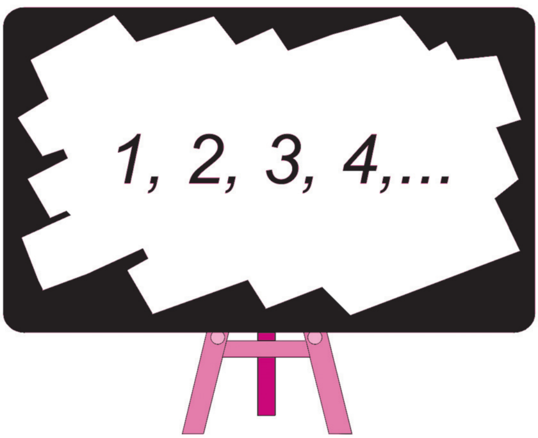
Basta observar que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

O princípio da indução nos garante, agora, que $S = N^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos n primeiros ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores do que zero.

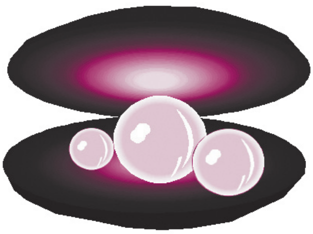
No ensino médio o professor encontra muitas outras oportunidades para fazer demonstrações por indução, se assim o desejar. Um aspecto importante é que os exemplos apresentados permitem ao professor mostrar aos alunos que fatos matemáticos podem ser verdadeiros para muitos exemplos e não serem verdadeiros sempre.

A única maneira de concluir a veracidade é fazer uma demonstração geral, que seja válida para qualquer caso, independentemente de exemplos.



Pérolas

Adaptado do artigo de
Paulo Ferreira Leite



Muitas histórias testemunham a extraordinária precocidade do matemático Gauss. Uma das favoritas refere-se a um episódio ocorrido quando ele tinha dez anos de idade e freqüentava o terceiro ano do ensino fundamental de uma escola onde medo e humilhação eram os principais ingredientes pedagógicos.

Na aula de Aritmética o professor pediu aos alunos que calculassem o valor da soma.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.$$

Uma excelente questão, sem dúvida, para aliviar o mestre de suas funções pelo resto da aula e manter bem alto o ideal pedagógico da escola.

Imediatamente após o problema ter sido proposto, Gauss escreveu o número 5050 em sua pequena lousa e a depositou, como era costume na época, sobre a mesa do professor. Durante o resto da aula, enquanto seus colegas trabalhavam, o pequeno Gauss foi, por diversas vezes, contemplado com o sarcástico olhar de seu mestre.

Ao fazer a correção, o estupefato Büttner – era esse o nome do professor –constatou que a única resposta correta era a de Gauss, que deu a seguinte justificativa para seu cálculo: a soma de

1 com 100, de 2 com 99, de 3 com 98, de 4 com 97, e assim por diante, é sempre o mesmo número 101. Ora, na soma desejada,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

este número aparece 50 vezes.

Portanto, o resultado desejado é $101 \times 50 = 5050$.

E esta multiplicação Gauss pôde fazer em poucos segundos.

Foi uma dura lição, mas o severo Büttner soube redimir-se, presenteando Gauss com o melhor livro de Aritmética que possuía e mudando totalmente sua atitude para com ele.

A observação feita por Gauss, de que é constante a soma dos termos eqüidistantes dos extremos na seqüência dos números de 1 a 100, continua válida para qualquer progressão aritmética e pode ser utilizada para deduzir a fórmula da soma dos termos de uma PA.

Progressão Aritmética – PA

Seja $(a_1, a_3, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r.

Como $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_n + a_{1,}$

Chamando $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ tem-se

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} \,.$$

No caso da soma 1 + 2 + ... + 100 temos

$$S = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Um evento decisivo para a carreira de Gauss ocorreu no dia 30 de março de 1796, quando contava dezenove anos de idade. Nesse dia inaugurou o diário científico, que manteve por toda sua vida, registrando uma descoberta notável. Conseguira provar a possibilidade de, utilizando apenas régua e compasso, dividir uma circunferência em 17 partes iguais. Na realidade, esse enunciado é uma interpretação geométrica dos resultados algébricos que obtivera, mostrando ser possível resolver a equação $x^{17} - 1 = 0$, pela extração de sucessivas raízes quadradas. Essa descoberta fez com que ele que, até então dividira seu interesse entre a Filologia e a Matemática, optasse definitivamente pela última, muito embora mantendo um vivo interesse por Línguas e Literatura.

Carl Friedrich Gauss

Uma medida do apreço de Gauss por essa sua descoberta matemática é o seu pedido de que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados.

Para compensar o fato de não podermos descrever aqui as técnicas utilizadas por Gauss para provar seu teorema, reunimos algumas informações suplementares sobre o problema da ciclotomia, isto é, da divisão da circunferência em partes iguais (ver Quadro).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é unanimemente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e sua obra, além de cobrir praticamente todos os ramos da Matemática, estende-se à Astronomia, Física e Geodésia. Era alemão (nasceu em Brunswick) e passou toda sua vida na Alemanha. Em 1807 foi nomeado professor e diretor do observatório astronômico de Göttingen. A partir dessa época, passou a residir no observatório onde, em razão do seu temperamento reservado, recebia poucas pessoas. Era perfeccionista, metódico e circunspeto, um perfeito contra-exemplo para o tradicional estereótipo do gênio matemático. Um dos poucos amigos que costumava receber era Georg Ribbentrop, um convicto e excêntrico solteirão, professor de direito em Göttingen. Conta-se que numa noite em que Ribbentrop jantava no observatório caiu forte tempestade e, prevendo as dificuldades que o amigo teria em regressar, Gauss insistiu para que ele ficasse para dormir. Num momento de descuido o hóspede desapareceu misteriosamente. Algum tempo depois bateram à porta e Gauss, atônito, recebeu de volta o amigo, ensopado dos pés a cabeça, mas trazendo seu pijama.

Ciclotomia

Ciclotomia = divisão da circunferência em partes iguais (divisão feita com régua e compasso).

Os geômetras gregos da Antiguidade, ~ 300 a.C., sabiam dividir a circunferência em n partes iguais para n de uma das seguintes formas:

$$2^k, \qquad 2^k.3, \qquad 2^k.5, \qquad 2^k.15.$$

Gauss, no seu livro DISQUISITIONES ARITHMETICAE, em 1801, provou o seguinte resultado:

"A divisão da circunferência em $n \geq 3$ partes iguais é possível se e somente se n é de uma das formas:

1) $n = 2^k$
2) $n = 2^k.p^1.p^2. \ldots . p^l$.

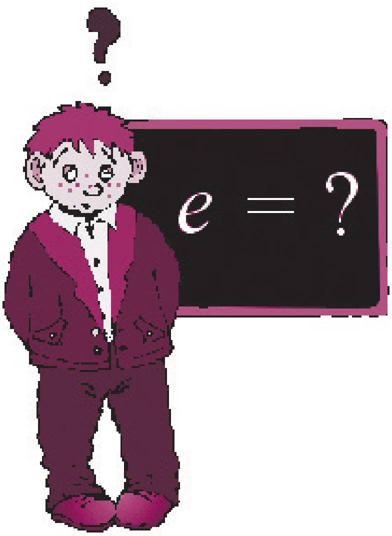
onde $p_1, p_2, \ldots, p_l$ são primos distintos, da forma $f^{-1}(33) = \frac{33+3}{2} = 18 = R$".

Estes números são chamados números de Fermat, em homenagem a Fermat, Pierre de (1601-1665) – matemático francês, que supunha que todos os números dessa forma fossem primos.

Com efeito, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$ são primos, mas Euler, em 1732, mostrou que $F_5 = 641 \times 6700417$ e, portanto, é composto. Sabe-se hoje que muitos outros números de Fermat são compostos.

O número *e*, por quê?

Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima



A noção de logaritmo quase sempre nos é apresentada, pela primeira vez, do seguinte modo: "o logaritmo de um número y na base a é o expoente x tal que $a^x = y$".

Segue-se a observação: "os números mais freqüentemente usados como base de um sistema de logaritmos são 10, e o número

$$e = 2{,}71828182\ldots\text{"};$$

o que nos deixa intrigados.

De saída, uma pergunta ingênua: esta regularidade na seqüência dos algarismos decimais desse número e persiste? Não. Apenas uma coincidência no começo. Um valor mais preciso seria $e = 2{,}718281828459\ldots$

Não se trata de uma fração decimal periódica. O número e é irracional, isto é, não pode ser obtido como quociente $e = p/q$ de dois inteiros. Mais ainda: é um irracional *transcendente*. Isto significa que não existe um polinômio $P(x)$ com coeficiente inteiros, que se anule para $x = e$, ou seja, que tenha e como raiz.

Por que então a escolha de um número tão estranho como base de logaritmos? O que faz esse número tão importante?

Talvez a resposta mais concisa seja que o número e é importante porque é inevitável. Surge espontaneamente em várias questões básicas.

Uma das razões pelas quais a Matemática é útil às Ciências em geral está no Cálculo (Diferencial e Integral), que estuda a variação das grandezas. Um tipo de variação dos mais simples e comumente encontrados é aquele em que o crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros, crescimento populacional (de pessoas ou bactérias), desintegração radioativa, etc. Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível. Vejamos um exemplo simples.

Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1real a juros de 100% ao ano. No final do ano, essa pessoa viria pagar-me e traria 2 reais: 1 que tomara emprestado e 1 dos juros. Isto seria justo? Não. O justo seria que eu recebesse e reais. Vejamos por que. Há um entendimento tácito nessas transações, de que os juros são proporcionais ao capital emprestado e ao tempo decorrido entre o empréstimo e o pagamento.

Assim, se meu cliente viesse me pagar seis meses depois do empréstimo, eu receberia apenas $1\frac{1}{2}$ reais. Mas isto quer dizer que, naquela ocasião, ele estava com $\frac{1}{2}$ real meu e ficou com esse dinheiro mais seis meses, à taxa de 100% ao ano; logo deveria pagar-me

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \text{ reais no fim do ano.}$$

Isto me daria 2,25 reais, mas, mesmo assim, eu não acharia justo.

Eu poderia dividir o ano num número arbitrário n, de partes iguais.

Transcorrido o primeiro período de $\frac{1 \text{ano}}{n}$, meu capital emprestado estaria valendo $1+\frac{1}{n}$ reais. No fim do segundo período de $\frac{1 \text{ano}}{n}$, eu estaria $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ reais, e assim por diante. No fim do ano eu deveria receber $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ reais. Mas, como posso fazer esse raciocínio para todo n, segue-se que o justo e exato valor que eu deveria receber pelo meu real emprestado seria

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

que aprendemos nos cursos de Cálculo ser igual ao número e. Um outro exemplo no qual o número e aparece.

As dízimas periódicas e a calculadora

Adaptado do artigo de
José Paulo Q. Carneiro

Em um concurso destinado principalmente a professores de Matemática, figurava a seguinte questão:

"Os números racionais *a* e *b* são, representados, no sistema decimal, pelas dízimas periódicas:

$$a = 3{,}0181818\ldots = 3{,}0\overline{18} \quad \text{e}$$

$$b = 1{,}148148\ldots = 1{,}\overline{148}.$$

Encontre, justificando, uma representação decimal de *a*–*b*."

Como *a* e *b* são racionais, temos que a diferença $a - b$, também é racional e, portanto, sua representação decimal é periódica. Apesar de na prova ter sido permitido o uso da calculadora, o período jamais seria descoberto com a certeza exigida pelo "justifique". Além disso, o período poderia ser maior do que o número de dígitos que a calculadora pudesse exibir no visor.

Um primeiro expediente que poderia ocorrer seria fazer a subtração por meio do esquema usado habitualmente para decimais finitos. Isso funcionaria bem em casos mais simples.

Por exemplo:

$$-\frac{\begin{array}{r}0,444\ldots\\0,333\ldots\end{array}}{0,111\ldots},\text{ o que estaria correto, pois } \frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{1}{9}.$$

Mas, no caso em questão, o desencontro entre os períodos das duas dízimas apresentadas dificultava o emprego dessa estratégia (a qual, aliás, precisaria ser discutida em termos conceituais). Vejamos:

$$-\frac{\begin{array}{r}30,18181818\ldots\\1,148148148\ldots\end{array}}{??}$$

Como a subtração usual é feita da direita para a esquerda, não se sabe bem por onde se deveria começar, antes de descobrir o período. Por conseguinte, o caminho natural seria calcular as geratrizes de a e b, subtrair as frações correspondentes, e então encontrar uma representação decimal para essa fração. Utilizando esse procedimento, teríamos:

$10a = 30,\overline{18} \quad 1000a = 3018,\overline{18}$

logo, $1000a - 10a = 990\,a = 2988$, ou $a = 3 + \dfrac{18}{990}$.

$1000b = 1148,\overline{148} \quad 1000b - b = 999b = 1147$, ou $b = 1 + \dfrac{148}{999}$,

portanto, $a - b = 3 + \dfrac{18}{990} - (1 + \dfrac{148}{999}) = 1 + \dfrac{1292}{1485} = \dfrac{2777}{1485}$.

Nesse ponto, o método mais usado por todo o mundo é dividir 2777 por 1485 (ou 1292 por 1485, ganhando uma etapa), pelo algoritmo tradicional, e aguardar o primeiro resto que se repete. Desse modo, obtém-se:

```
1 2 9 2 0                      | 1485
                               +----------
  1 0 4 0 0                      0,8700336
          5 0 0 0
            5 4 5 0
              9 9 5 0
                1 0 4 0
```

Como se repetiu o resto 1040, a partir daí, os algarismos 7, 0, 0, 3, 3, 6 se repetiriam. Logo, $a - b = 1{,}8\overline{700336}$.

Vamos agora fazer alguns comentários:

1. Algumas pessoas envolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (alunos, professores, pais, etc.) expressam às vezes a crença de que, com o advento da calculadora, nunca mais haverá ocasião de usar o algoritmo tradicional da divisão. Alguns até usam isso como um argumento para proibir o uso da calculadora em certas fases iniciais da aprendizagem: “é necessário primeiro que o aluno aprenda o algoritmo tradicional, e só depois lhe será permitido usar a calculadora; senão, ele não terá motivação para aprender tal algoritmo”.

   Na realidade, o exemplo aqui tratado mostra que nós, professores, temos que exercer nossa criatividade para criar problemas desafiadores, que coloquem em xeque até mesmo a calculadora, deixando claras as suas limitações, em vez de proibir o seu uso, o que é uma atitude antipática, repressora, e totalmente contrária ao que um aluno espera de um professor de Matemática. De fato, para um leigo, ou um iniciante em Matemática, nada mais “matemático” do que uma calculadora, e ele espera que um professor vá iniciá-lo ou ajudá-lo com essa ferramenta, e não proibi-lo de usá-la.

2. Existiria um outro método para encontrar uma representação decimal de $\dfrac{208}{297}$ (ou de $\dfrac{1292}{1485}$, mas já vimos que basta o primeiro), que não fosse o algoritmo tradicional da divisão? A resposta é sim.

Basta tomar as sucessivas potências de 10, a saber: 10, 100, etc., até que encontremos uma que deixe resto 1, quando dividida por 297. Não é difícil fazer isso, experimentando com a calculadora:

$10^3 = 3 \times 297 + 109$ $\quad 10^4 = 33 \times 297 + 199$ $\quad 10^5 = 336 \times 297 + 208$

$10^6 = 3367 \times 297 + 1.$

A partir daí, obtém-se: $\dfrac{1}{297} = 3367 \times \dfrac{1}{10^6 - 1}$, e portanto,

$$\frac{208}{297} = 208 \times 3367 \times \frac{1}{10^6 - 1}$$
$$= 700336 \times \frac{1/10^6}{1 - 1/10^6} = \frac{700336}{10^6}\left(1 - \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \cdots\right)$$
$$= 0{,}700336700336700336\ldots = 0{,}\overline{700336}$$

em que a última passagem vem da propriedade das progressões geométricas infinitas: $1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}, -1 < q < 1.$

Observe que o período da dízima tem comprimento 6, que é o expoente da menor potência de 10 que deixa resto 1, quando dividida por 297.

Considerações finais

Observemos que toda fração decimal finita como 0,125, por exemplo, é gerada por uma fração cujo denominador é uma potência de 10:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{2^3 \times 5^3}.$$

Por outro lado, uma fração cujo denominador não tem outros fatores primos além do 2 e do 5 (poderia ser um deles apenas) sempre pode ser expressa por uma fração cujo denominador é uma potência de 10 e, portanto, tem uma representação decimal finita. Por exemplo,

$$\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\times 5}=\frac{3\times 5}{2^2\times 5^2}=\frac{15}{10^2}=0{,}15.$$

Esse raciocínio permite concluir que uma fração a/b, na forma irredutível, tem representação decimal infinita se, e somente se, $b = b_0 \times 2^m \times 5^n$, com $b_0 > 1$, m, $n > 0$ e $mdc\,(b_0, 10) = 1$.

Isso posto, podem-se provar os seguintes resultados:

(a) a representação decimal de a/b é periódica e pode apresentar ou não pré-período de tamanho $r = \max\{m, n\}$ algarismos (por exemplo, 0,356212121... tem pré-período de três algarismos, 3, 5 e 6);

(b) se $m > 0$ ou $n > 0$, então há um pré-período formado de $r = \max\{m, n\}$ algarismos;

(c) o período é formado de h algarismos, sendo h o menor inteiro positivo tal que $10^h - 1$ é múltiplo de b_0 (uma generalização da propriedade conhecida como *teorema de Euler* [1760] garante a existência de h).

Por exemplo:

- 5/21 não tem pré-período, pois $21 = 3 \times 7$ (notar a ausência de 2 e 5) e o período é formado de 6 algarismos, uma vez que

  $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$, $10^4 - 1 = 9999$ e $10^5 - 1 = 99999$ não são múltiplos de 21, mas

  $$10^6 - 1 = 999999 = 21 \times 47619.$$

  De fato,

  $$5/21 = 0{,}238095238095\ldots = 0{,}\overline{238095}.$$

- 9/140 tem pré-período formado de 2 algarismos (observar que $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ e que $\max\{2, 1\} = 2$) e período formado de 6 algarismos, pois 6 é o menor expoente tal que $10^6 - 1$ é múltiplo de 7. De fato,

  $$9/140 = 0{,}0642857428571\ldots = 0{,}06\overline{428571}.$$

É possível construir um triângulo cujos lados estejam em PG de razão q?

Adaptado do artigo de
Paulo A. da Mata Machado

A resposta é: depende da razão, q, da progressão. Se, por exemplo, $q = 1$, temos o triângulo eqüilátero. Se $q = 1{,}25$, temos os triângulos de ângulos internos $87{,}22°$, $53{,}04°$ e $39{,}74°$. Se, porém, $q = 2$, não há solução.

Como se chega a essa conclusão? Muito simples. Podemos, colocando os lados do triângulo em ordem crescente e considerando um triângulo semelhante, admitir que a solução seja um triângulo de lados 1, q e q^2, sendo $q \geq 1$. Em um triângulo, um lado é menor que a soma dos outros dois, portanto, $q^2 - q - 1 < 0$.

As raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$ são $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, logo $q^2 - q - 1 < 0$ para

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < q < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Como estamos considerando apenas as razões maiores ou iguais a 1, temos $1 \leq q < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. (1)

Determinado o intervalo de variação de q, vamos determinar quais são os ângulos internos do triângulo, usando a lei dos cossenos,

$$q^2 = 1 + q^4 - 2q^2 \cos\alpha,$$

sendo α o ângulo interno formado pelo maior e pelo menor lado do triângulo. Rearranjando a equação, obtemos: $\cos\alpha = \dfrac{q^4 - q^2 + 1}{2q^2}$. (2)

Dado q, podemos determinar qual será o ângulo entre o menor e o maior lado do triângulo pela equação (2). Esse ângulo tem também uma limitação de valores. Para determinarmos qual é essa limitação, vamos reescrever a equação da seguinte forma:

$$q^4 - (2\cos\alpha + 1)q^2 + 1 = 0.$$

Temos uma equação bi-quadrada que somente terá solução se

$$4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 3 \geq 0 \quad \text{, ou}$$

equivalentemente, $\cos\alpha \geq 1/2$. Como trata-se de um ângulo de triângulo, α não pode ser maior que 90° e, portanto, $\alpha \leq 60^{\circ}$.

Há um caso particular que ainda não foi discutido. Quais são os ângulos internos de um triângulo retângulo cujos lados estejam em progressão geométrica, e qual é a razão dessa progressão?

Para triângulo retângulo, podemos usar o teorema de Pitágoras:

$q^4 = q^2 + 1$ ou $q^4 - q^2 - 1 = 0$, cuja solução, no intervalo obtido em (1), é $q = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

Aplicando o valor de q na equação (2), obtém-se

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{ou} \quad \alpha = 51{,}83^\circ.$$

Consequentemente, os ângulos internos do triângulo retângulo que tem os lados em progressão geométrica são: 90°, 51,83° e 38,17°.

A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau

Adaptado do artigo de
César Polcino Milies

Niccolò Fontana (Tartaglia)

Introdução

A história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores.

Uma das personagens dessa história é Niccolò Fontana (1500-1557 aproximadamente). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal, sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de Tartaglia (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução das equações do terceiro grau. Scipione del Ferro (1465-1562 aproximadamente) –que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida –foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, Annibale delia Nave – seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha – e António Maria Fior (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia. Tais confrontos intelectuais eram freqüentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas, e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo

$$x^3 + ax = b.$$

Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente renunciou aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos as personagens da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida foi mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para termos uma idéia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643:

Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as *ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isso é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.*

Por outro lado, Naudé é bem mais crítico quanto à vida pessoal e características de personalidade de Cardano, distorcendo-as até o patológico. Foram essas opiniões de Naudé, amplamente divulgadas no prefácio das obras de Cardano, que deram origem à visão distorcida que as futuras gerações tiveram sobre seu caráter.

Girolano Cardano

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa, com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartaglia tinha feito também algumas descobertas sobre tiro e fortificações –e esperava obter disso algum benefício. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou –e achou –uma demonstração que o justificasse. Mais ainda, ele estimulou seu secretário e discípulo Ludovico (Luigi) Ferrari (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau e este achou o correspondente método de resolução com a devida demonstração.

De posse de ambas as soluções, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544, mestre e discípulo realizaram uma viagem a Florença e, no caminho, fizeram uma visita a Annibale delia Nave, em Bologna. De acordo com um relato de Ferrari, este lhes mostrou um manuscrito de del Ferro, que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna,* que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer, "ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa". Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano.

Os versos de Tartaglia

Como dissemos acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta, por meio de versos. Tal idéia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A seguir, reproduzimos uma tradução para o português dos versos transcritos na página 120, da edição de 1554, dos *Quesiti*:

1. *Quando o cubo com a coisa em apreço*
Se igualam a qualquer número discreto,
Acha dois outros diferentes nisso

2. *Depois terás isto por consenso*
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo

3. *Depois, o resíduo geral*
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal.

4. *Na segunda destas operações,*
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções

5. *Do número farás dois, de tal forma*
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa.

6. *Depois, por um preceito comum*
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito

7. *Depois, a terceira destas nossas contas*
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas

8. *Isto eu achei, e não com passo tardo,*
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Analisaremos, a seguir, esses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo. Antes de tudo, é conveniente lembrar que Tartaglia (assim como depois, faria também Cardano) não utiliza coeficientes negativos em suas equações. Então, em vez de uma equação geral do terceiro grau, ele deve considerar três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b,$$
$$x^3 = ax + b,$$
$$x^3 + b = ax\ .$$

Tartaglia chama cada um desses casos de *operações* e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: "*cubo e coisa igual* a *número*". No quarto verso começa a considerar o segundo tipo *"quando o cubo estiver sozinho"* e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso.

Vejamos agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples.

O *número* se refere ao termo independente, que denotamos aqui por *b*. Quando diz *"acha dois outros diferentes nisso",* está sugerindo tomar duas novas variáveis, cuja diferença seja precisamente b, i.e., escolher U e V tais que:

$$U - V = b.$$

A frase "... *que seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa*" significa que U e V devem verificar:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Finalmente, "o *resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal*" significa que a solução é dada por

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzi-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação.

A frase final "... a *cidade cingida pelo mar*" é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas.

A resolução da equação do terceiro grau

Nesta seção veremos como justificar a fórmula de Tartaglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá fazer uma exposição relativamente simples.

Vamos considerar uma equação do terceiro grau, escrita na forma

$$x^3 + ax = b,$$

para compará-la com a *primeira destas operações ... cubo e coisa igual a número,* discutida nos três primeiros versos de Tartaglia. Na verdade, há um caminho muito simples para achá-la. Comecemos por lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 .$$

Pondo em evidência o produto uv, temos:

$$(u - v)^3 = 3uv(v - u) + (u^3 - v^3),$$

isto é, $(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$.

Se podemos escolher, de alguma forma, u e v de modo que verifiquem:

$$uv = a/3,$$

$$u^3 - v^3 = b,$$

a relação acima se transformará em:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b,$$

o que significa que $x = u - v$ será uma solução da equação dada.

Em outras palavras, se conseguirmos achar u e v, que sejam soluções do sistema acima, tomando $x = u - v$, obter-se-á uma solução da equação proposta. Resta-nos então o problema de resolver o sistema em u e v. Para isso, observemos que, elevando ao cubo a primeira equação, ele se transforma em:

$$u^3 v^3 = (a/3)^3,$$

$$u^3 - v^3 = b.$$

Finalmente, fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$, temos:

$$UV = (a/3)^3,$$

$$U - V = b.$$

Isso é muito fácil de resolver; U e $-V$ são as raízes da equaçãodo segundo grau:

$$x^2 - bx + (-a/3)^3 = 0,$$

que são dadas por:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\frac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$