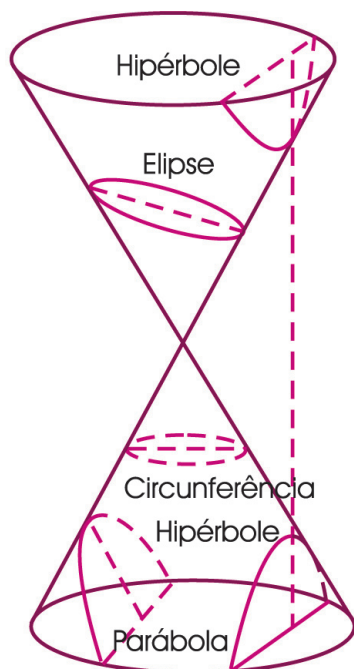


Capítulo 3

Geometria

Por que os nomes elipse, parábola e hipérbole?

Adaptado do artigo de
Geni Shulz da Silva

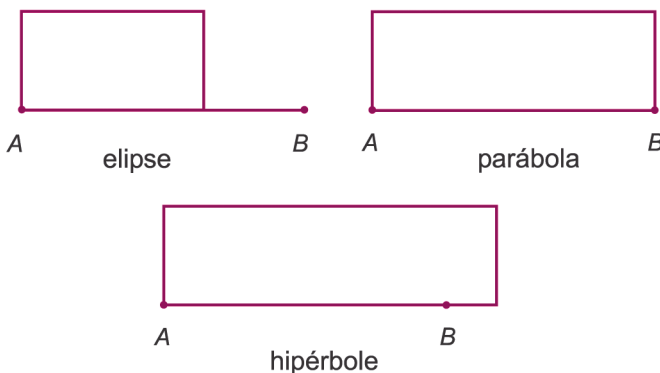


A Menaecmus, por volta de 350 a.C., discípulo e sucessor do matemático Eudoxo na direção da Escola de Cizico (Ásia Menor), atribui-se a invenção das curvas *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, por ele construídas mecanicamente e utilizadas na resolução do clássico problema da duplicação do cubo (problema de Delos). Mas foi Apolônio (III séc. a.C.) quem extraiu essas curvas de uma superfície cônica, mediante seções planas. Daí a denominação comum de *seções cônicas*.

Os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole* foram mesmo usados por Apolônio, que os tirou de uma terminologia pitagórica (VI séc. a.C.) específica para áreas.

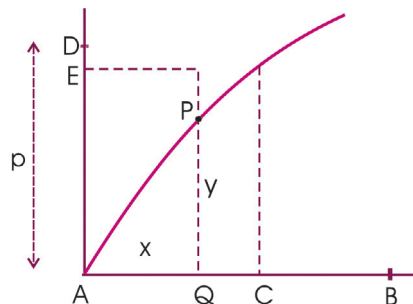
Assim, quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de *elipse*, *parábola* ou *hipérbole*, conforme a referida base fosse menor do que o segmento,

com ele coincidisse ou o excedesse. E observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois *elipse* quer dizer *falta*, *parábola* corresponde a *igual* e *hipérbole* exprime *excesso*.



Vejamos agora o fato em relação às curvas em questão. Para isso, consideramos uma cônica de vértice A , como na figura.

Seja P um ponto qualquer da cônica e Q sua projeção ortogonal sobre AB . Pelo vértice A traçamos uma reta perpendicular a AB , sobre a qual tomamos $AD = p$, p um número real positivo previamente dado.



A seguir, construamos um retângulo de base AQ , situada sobre a reta AB , e lado AE sobre AD , de modo que a sua área seja $\overline{PQ}^2$.

Conforme

$$AE < AD, \quad AE = AD \quad \text{ou} \quad AE > AD,$$

Apolônio denominou a cônica de

elipse, *parábola* ou *hipérbole*.

Em outros termos, se considerarmos a curva referida a um sistema cartesiano de eixos coordenados com eixo dos x (abscissas) sobre AB e eixo dos y (ordenadas) sobre AD e se designarmos as coordenadas de P por x e y , a curva será uma *elipse* se $y^2 < px$, uma *parábola* se $y^2 = px$ e uma *hipérbole* se $y^2 > px$.

Por que as antenas são parabólicas?

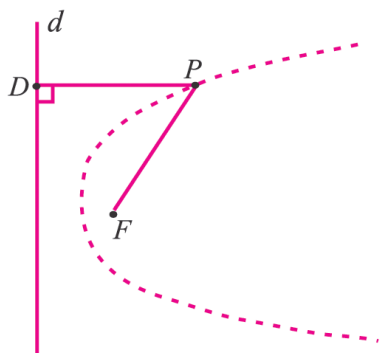
Adaptado do artigo de
Eduardo Wagner



A palavra *parábola* está, para os estudantes do ensino médio, associada ao gráfico da função polinomial do segundo grau. Embora quase todos conheçam as antenas parabólicas, nem todos fazem ligação entre uma coisa e outra. Os espelhos dos telescópios e dos faróis dos automóveis também são parabólicos. Por quê?

Neste artigo, vamos partir da definição geométrica dessa curva chamada parábola, descobrir sua equação e investigar algumas de suas propriedades, que vão justificar por que as antenas e alguns espelhos precisam ser parabólicos.

Por questões de simplicidade, tudo o que dissermos de agora em diante passa-se num plano.



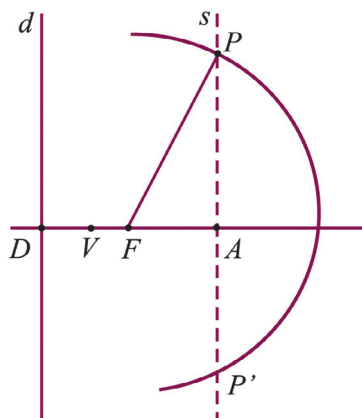
Definição

Consideremos uma reta d e um ponto F . Parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos cuja distância à reta d é igual à distância ao ponto F .

Na figura, se $PD = PF$, então P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d .

Para obter diversos pontos de uma parábola, dados o foco F e a diretriz d , trace por F uma reta r perpendicular à diretriz, e seja D o ponto de interseção de r e d .

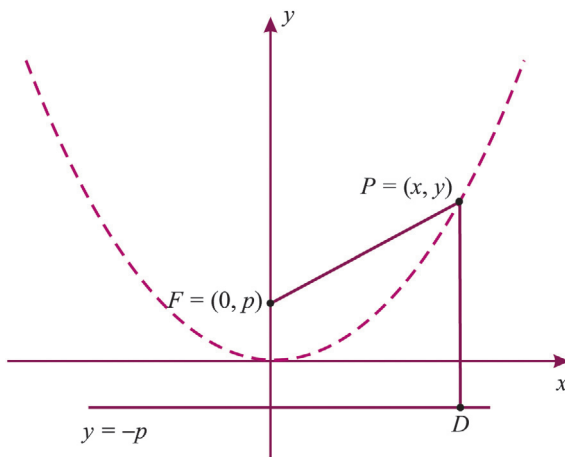
O segmento DF chama-se parâmetro da parábola e o ponto V , médio de DF , é o vértice da parábola. Para cada ponto A da semi-reta VF , trace a reta s , perpendicular à r . A circunferência de centro F e raio AD corta s nos pontos P e P' , que pertencem à parábola.



Como $PD = AD$, a distância de P ao foco é igual à sua distância à diretriz.

A equação da parábola

Em um sistema de coordenadas, não é difícil encontrar a equação da parábola, dados o foco e a diretriz. Tomemos $F = (0, p)$ como foco e $y = -p$ como diretriz.



Se $P = (x, y)$ é tal que $PF = PD$, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Elevando ao quadrado e cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos: $x^2 = 4py$ ou $y = \frac{1}{4p}x^2$, o que mostra que a equação

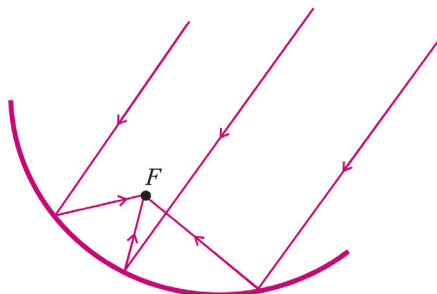
de uma parábola é da forma $y = ax^2$ (um polinômio do segundo grau). Reciprocamente, dada uma função da forma $y = ax^2$, é fácil provar que qualquer um de seus pontos possui distância ao ponto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ igual à distância à reta $y = -\frac{1}{4a}$, o que mostra que o gráfico de $y = ax^2$ é uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$.

Com um pouco mais de trabalho, o leitor poderá demonstrar que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é também uma parábola com vértice no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Antenas e espelhos

Vamos voltar agora às nossas perguntas iniciais. Por que as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas? Por que os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos?

Nos dois exemplos acima, os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

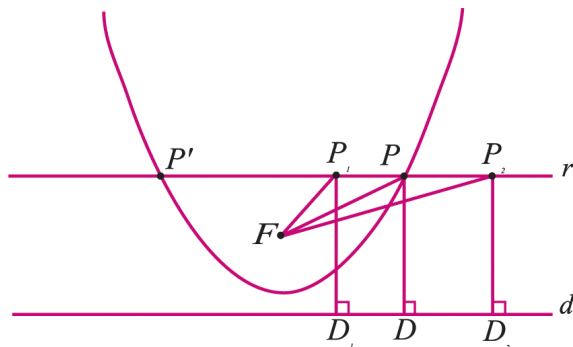


A antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos ao ponto F.

Vamos mostrar que se a superfície for parabólica, essa situação ocorre.

Observação 1

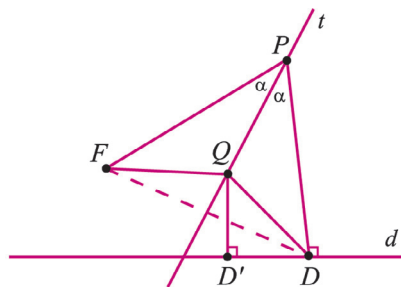
Observemos inicialmente que uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz, chamada região interior, e outra, onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz, chamada região exterior.



A figura mostra uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela à d , cortando a curva em P e P' . Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP' , então $P_1F < PF = PD = P_1D_1$ e, portanto, P_1 é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r , exterior ao segmento PP' , então $P_2F > PF = PD = P_2D_2$ e P_2 é exterior à parábola.

Observação 2

Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Aliás, isso não é inteiramente verdadeiro, mas para o observador da Terra é aceitável. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”.

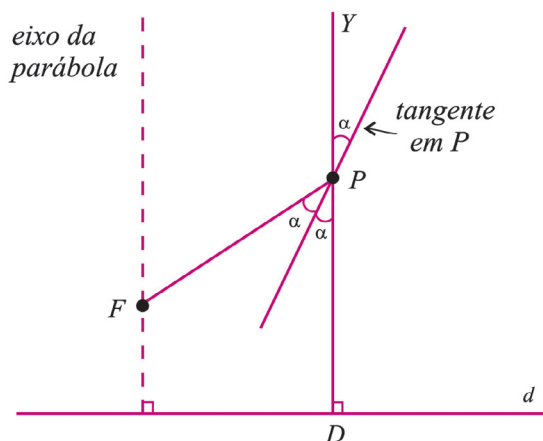


Consideremos um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d , e ainda a reta t , bissetriz do ângulo FPD . Vamos mostrar geometricamente que t é tangente à parábola.

No triângulo FPD , como $PF = PD$, a reta t , bissetriz do ângulo FPD , é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD . Seja agora Q , um ponto qualquer da reta t , distinto de P . Se D' é a projeção de Q sobre d , temos:

$$QF = QD > QD'.$$

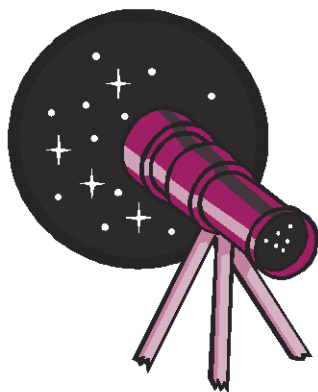
Portanto, Q é exterior à parábola. Ora, o ponto P da reta t pertence à parábola, e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P .



Observe, na figura acima, a semi-reta PY , prolongamento do segmento DP . Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD , temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

A hipérbole e os telescópios

Adaptado do artigo de
Geraldo Ávila



O artigo anterior trouxe uma interessante propriedade focal da parábola, que é utilizada na construção de refletores e antenas parabólicas. Seria natural que o leitor perguntasse: e a hipérbole? Tem ela propriedade parecida? Sim, tem, e é uma propriedade importante na tecnologia dos telescópios, como explicaremos neste artigo.

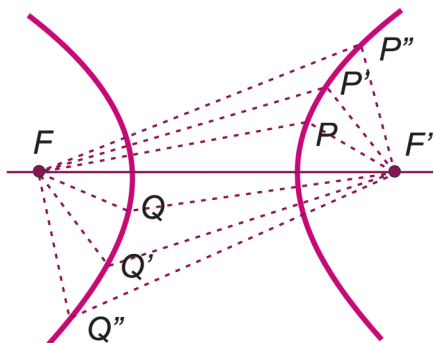
O que é uma hipérbole

As chamadas seções cônicas – *elipse*, *hipérbole e parábola* – são as curvas que se obtêm como intersecção de um cilindro ou cone circular reto com um plano. Outra maneira equivalente de definir essas curvas é a geométrica e se faz em termos da chamada *propriedade focal*. Supondo que estamos trabalhando em um plano, a hipérbole, por exemplo, pode ser definida geometricamente:

Dado um número positivo d e dois pontos F e F' , chama-se hipérbole ao lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a F e F' é sempre igual a d .

Assim, $P, P', P'', \dots$ são pontos da hipérbole, visto que

$$PF - PF' = P'F - P'F' = P''F - P''F' = \dots = d.$$



Do mesmo modo, $Q, Q', Q'', \dots$, satisfazendo as condições,

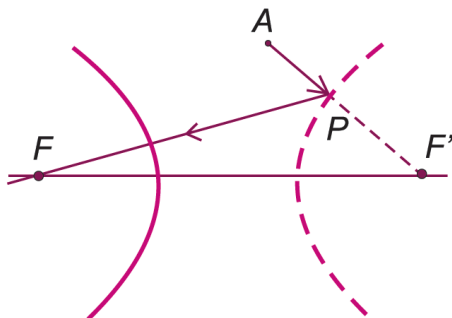
$$QF' - QF = Q'F' - Q'F = Q''F' - Q''F = \dots = d$$

também pertencem à hipérbole, a qual, portanto, possui dois ramos distintos.

Os pontos F e F' são chamados *focos* da hipérbole.

Reflexão da luz

Vamos imaginar um espelho refletor construído com o formato de um ramo de hipérbole, estando a parte refletora do “lado de fora” da hipérbole, isto é, na sua parte côncava.



Suponhamos que um raio de luz proveniente de um ponto A incida no espelho em P , como ilustra a figura, de forma que a reta AP passe pelo foco F' . Então é possível mostrar, de forma análoga ao feito para a parábola no artigo anterior a este, que o raio refletido passará pelo outro foco F . O leitor interessado pode encontrar a demonstração dessa propriedade, por exemplo, no número 34 da RPM. Vamos ver uma de suas aplicações na construção de telescópios.

Telescópios refletores

Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro cientista a construir um telescópio para observação astronômica. Isso se deu em 1609 e resultou em notáveis descobertas: Galileu viu montanhas e acidentes geográficos



Galileu Galilei

na superfície lunar, observou que Vênus passa por fases como a Lua, notou que Saturno tem um formato alongado (devido a seus anéis), e que Júpiter possui satélites girando a sua volta. Em pouco tempo Galileu revolucionou a Astronomia.

Os primeiros telescópios, inclusive o de Galileu, foram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz. São os chamados *telescópios refratores*.

Acontece que as lentes têm vários inconvenientes, como as deformações das imagens que elas produzem, fenômeno que pode ser facilmente observado com qualquer lente de grau de óculos comuns; basta olhar através da lente e movê-la transversalmente para um lado e para o outro, ou em círculos, para notar essas deformações.

Além disso, a lente também atua como um prisma, decompondo a luz branca em várias cores, produzindo outro tipo de efeito indesejável nas observações, as chamadas aberrações cromáticas.

Esses inconvenientes dos telescópios refratores não existem nos *telescópios refletores*. O telescópio refletor nada mais é do que um **espelho parabólico** no fundo de um tubo, como ilustra a Figura 1. Os raios

provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco F .

O problema agora é que, para observar essa imagem, o observador teria de estar com seu olho posicionado no foco da parábola, mas isso é impossível na prática.

Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema em seu telescópio refletor, colocando um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco F (Figura 1). Com isso, os raios que iriam formar a imagem em F são novamente refletidos e vão formar essa imagem num ponto fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.



Figura 1

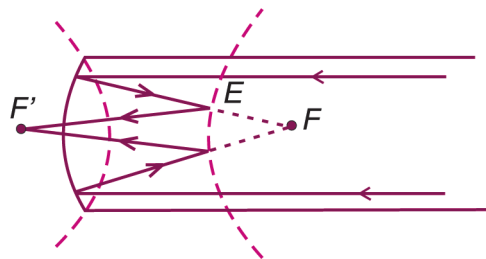


Figura 2

Em 1672 o astrônomo francês *Cassegrain* propôs a utilização de um **espelho hiperbólico** E , como ilustra a Figura 2, em lugar do espelho plano de Newton. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco F da parábola.

Agora os raios que iriam formar a imagem no foco F são refletidos pelo espelho E e formarão essa imagem no outro foco da hipérbole.

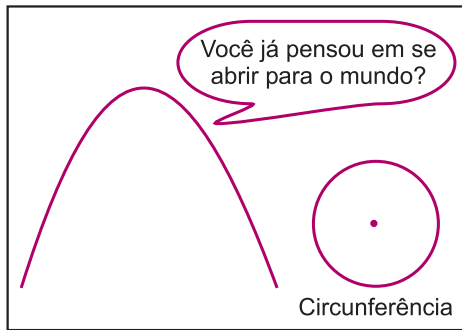
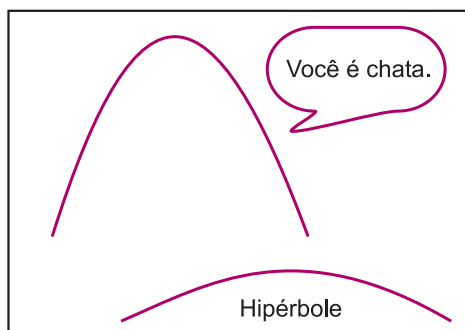
Para compreender a vantagem desse espelho hiperbólico de Cassegrain sobre o espelho plano de Newton, devemos observar que o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco F , sob pena de o ponto da Figura 1 ficar dentro do telescópio; em consequência, o espelho plano precisa ser de razoável tamanho, o que resulta num bloqueio significativo da luz incidente no espelho parabólico que forma a parte principal do telescópio.

O espelho de Cassegrain, pelo contrário, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco F , mantendo-se fixa a distância FF' entre os focos da hipérbole; em consequência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos F e F' também pode ser alterada para mais ou para menos, sem mudar a posição do foco F . A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico E , adequando-a, assim, às exigências das observações.

Essas montagens de Cassegrain somente começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então passaram a ser largamente usadas, e hoje em dia estão presentes não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios.

O famoso telescópio ótico do observatório de Monte Palomar, que fica 80 km a nordeste de San Diego, na Califórnia, utiliza várias montagens do tipo de Cassegrain.

As PARÁBOLAS falam...



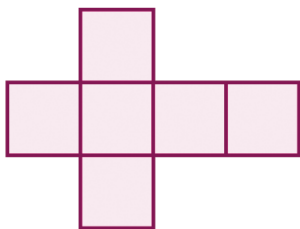
A mágica do cubo

Adaptado do artigo de
Gildo A. Montenegro

Introdução

A visualização espacial permite reconstruir mentalmente o mundo físico e antecipar a solução de problemas, antes que eles surjam no ambiente real. Nessa linha, a intuição geométrica deve ser estimulada na escola, com a construção de modelos de poliedros e objetos da vida cotidiana (maquetes).

Uma forma geométrica conhecida desde a antiguidade, e amplamente usada pelo homem, é o cubo. Há poucos anos surgiu o “cubo mágico”, engenhoso quebra-cabeça que utiliza as combinações de figuras nas faces de cubos interligados. Entretanto, podem-se fazer, em sala de aula, outras “mágicas” com cubos.



Uma aposta cúbica

Ele—Todos os livros dizem a mesma coisa: com seis quadrados pode-se armar um cubo.

Ela—É verdade. Abra uma caixa cúbica e você verá que ela é formada por seis quadrados, como na figura.

Ele –Isso é o que todos dizem. Mas eu quero mostrar como fazer um cubo com quatro quadrados.

Ela –Com quatro faces você forma uma caixa cúbica, mas ficam faltando duas tampas.

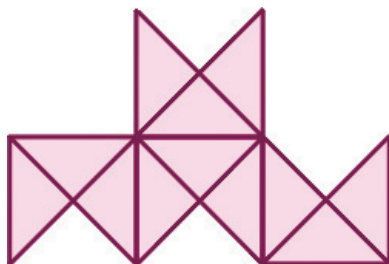
Ele –E se eu fizer um?

Ela –Não existe cubo com quatro faces. Se você quer economizar, experimente viver com menos dinheiro.

Ele –Por falar em dinheiro, você aposta um almoço como eu farei um cubo com menos de quatro quadrados?

Ela –Está fechada a aposta!

Nessa altura, ele apresenta um recorte em cartolina:



Ele –Aqui havia quatro quadrados e eu recortei quatro triângulos que formavam um quadrado; restam três quadrados. Agora, dobre nas linhas convenientes para formar um sólido.

Ela –Não pode ser... bom... de fato, é um cubo. Só que ele é menor do que aquele que eu mostrei.

Ele –A aposta não envolvia medidas. Mas, eu faço um acordo: você paga o almoço e eu, a sobremesa... desde que servida em cubas.

Semelhança, pizzas e chopes

Adaptado do artigo de
Eduardo Wagner

As histórias que vamos contar envolvem dois amigos que gostam de frequentar bares e restaurantes, além de discutir problemas de Matemática. Em pelo menos duas situações, surgiram interessantes problemas cujas soluções, além de elegantes, são bastante educativas.

Primeira história

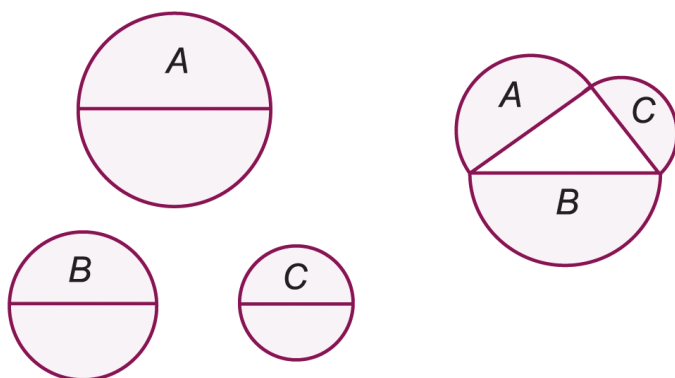
Augusto e João foram a um restaurante para comer pizza. O primeiro pediu uma grande, e o segundo, uma média e uma pequena, todas do mesmo sabor. Curiosamente, o preço da pizza grande era exatamente igual à soma dos preços das pizzas média e pequena. Logo após os pedidos, surgiu naturalmente o problema de saber quem vai comer mais.

O fato de os preços a pagar serem iguais não quer dizer nada, porque nos restaurantes, o preço não costuma ser proporcional à quantidade da comida servida. Augusto argumenta que, se tivesse uma régua,



poderia medir os diâmetros, calcular as áreas e verificar se a área da pizza grande é maior, igual ou menor do que a soma das áreas das outras duas. Porém, não havia régua disponível.

Pensando um pouco, João, bom geômetra, declarou ter resolvido o problema, dizendo que assim que as pizzas chegassem, diria quem comeria mais e, para isso usaria apenas objetos que estavam em cima da mesa. Augusto estupefato duvidou. “Como é possível? Não temos instrumento de medida algum. Em cima da mesa só há talheres, copos, guardanapos e o cardápio, responsável por nossa incrível discussão!” A espera não foi longa, e as pizzas chegaram. Rapidamente, então, João cortou cada uma delas em duas metades.



Sobre a mesa (de mármore) juntou os diâmetros para formar um triângulo. Utilizando o canto do cardápio como um modelo para o ângulo reto, João verificou que o ângulo oposto ao diâmetro da maior metade (α) era menor do que 90° , e declarou “eu como mais”. E Augusto, após pensar alguns momentos, concordou.

Qual é a explicação?

A explicação depende de dois teoremas importantes. O primeiro bastante conhecido e o segundo, não muito.

Teorema 1

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Teorema 2

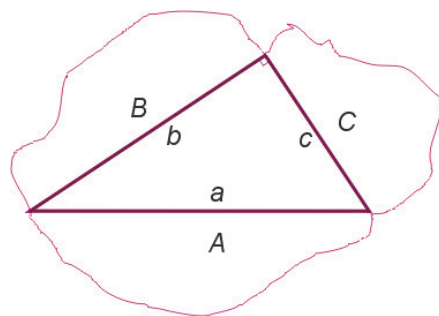
Se figuras semelhantes são construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo, então a área da figura maior é igual à soma das áreas das outras duas.

Vamos demonstrar esse segundo teorema.

Na figura a seguir, A , B e C representam as áreas de figuras semelhantes que foram construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c .

Pelo teorema 1:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2},$$
$$\frac{B}{C} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$



Portanto,
$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Como no triângulo retângulo, $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$.

Reciprocamente, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados a , b e c de um triângulo, e se $A = B + C$, então $a^2 = b^2 + c^2$ e, pela recíproca do teorema de Pitágoras, o triângulo é retângulo.

Para concluir que, no nosso problema, João estava certo, observe que, se α é o ângulo oposto ao lado a do triângulo de lados a , b e c , temos:

$$\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < B + C \text{ e}$$

$$\alpha > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > B + C.$$

Portanto, se na nossa história João constatou que o ângulo α era menor que 90° , então a área da semipizza grande era menor que a soma das áreas das outras duas metades.

Segunda história



Dias depois, Augusto, afobado com o calor, senta-se em um bar e pede um chope (na verdade, o primeiro de muitos). Nesse lugar, o chope é servido em “tulipas”, que são copos com a forma de um cone. O garçom chega com a bebida, ao mesmo tempo que João encontra seu amigo. “Como vai, João? Sente-se e tome rápido a metade deste copo. Eu tomo a outra metade”. A fisionomia de João mostra alguma tristeza. Como determinar a altura do nível da bebida quando um copo cônico contém a metade do seu conteúdo?

Augusto então alivia a situação. “Meu caro amigo, para este problema, seus artifícios são insuficientes. Eu hoje vim prevenido e trouxe uma régua e uma calculadora. Desculpe-me pela brincadeira, e vamos juntos resolver o nosso problema”.

Augusto então saca de sua régua, calculadora, caneta e sobre um guardanapo mostra a solução, sob o olhar de um estupefato garçom.

“Observe, João, que o copo tem 20 cm de altura. Desejamos obter a altura da superfícies do líquido que corresponde à metade do volume do copo. Para isso, precisamos recordar dois teoremas”.

Teorema 3

Toda seção paralela à base de um cone forma um outro cone semelhante ao primeiro.

Teorema 4

A razão entre o volume de sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Augusto continua sua explicação. Se você tiver tomado uma parte do conteúdo deste copo, teremos aqui, pelo teorema 3, dois objetos semelhantes: o cone formado pelo líquido e o próprio copo. A razão de semelhança entre esses dois copos é a razão entre suas alturas, ou

seja, $h/20$. Como desejamos que o líquido tenha a metade do volume do copo, pelo teorema 4 podemos escrever:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{h}{20} \right)^3 \text{ isto é, } \frac{h}{20} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Assim, a altura que corresponde à metade do volume do copo é $h = 10\sqrt[3]{4} \text{ cm}$ ".

João concorda com a perfeita explicação, mas repara que a resposta não resolve ainda o problema, porque ele não tem a menor idéia de quanto é $10\sqrt[3]{4}$. E então Augusto, com a sua calculadora e seu sorriso irônico, diz: "Ah! é bom saber que esse valor dá aproximadamente 16 cm".

Bem. O problema foi resolvido, e o chope, já meio quente, foi adequadamente dividido. Falta apenas o final da história.

Nessa altura, as pessoas das outras mesas ouviam atentamente nossos personagens com um misto de admiração e espanto. Nisso, João faz uma descoberta, que anuncia em alto e bom som: "Este problema revela que quando somos servidos em tulipas com 4 cm de colarinho estamos tomando apenas metade do conteúdo do copo. Assim, se eu digo que tomei 10 chopes, na verdade tomei 5, mas paguei 10!!"

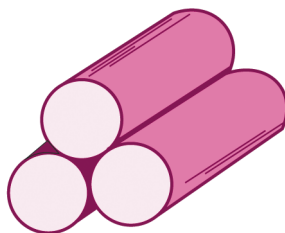
E foram expulsos do bar.



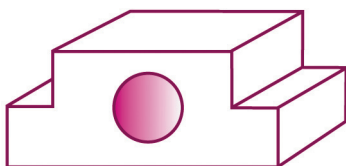
A precisão do furo cilíndrico

Adaptado do artigo de
Luiz Márcio Imenes

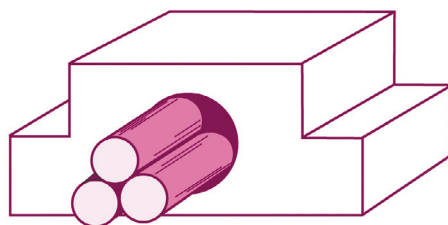
Um ex-aluno meu, que hoje é professor universitário, enquanto fazia o curso de Matemática, foi professor em cursos técnicos. Certa vez, descreveu-me um processo, usado pelos técnicos de uma indústria, para verificar a precisão de um furo cilíndrico praticado numa peça.



Os técnicos tomam três bastões cilíndricos de mesmo raio r , que são fixados uns aos outros (com solda, por exemplo), formando um conjunto solidário. O problema é calcular o raio r , de modo que, ao introduzir o conjunto no furo cilíndrico, os bastões se ajustem sem folga.



Girando o conjunto, percebemos se o furo praticado na peça é, de fato cilíndrico. Ele deve girar “sem pegar” e sem folga.

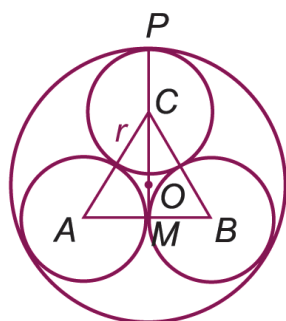


Pois bem, a execução desse processo exige a solução de um problema de Geometria. Na figura seguinte, os três círculos menores têm o mesmo raio r , são tangentes entre si dois a dois, e cada um deles é tangente ao círculo maior de raio R .

Devemos calcular r em função de R .

Vamos resolver o problema:

O triângulo ABC é equilátero, e seu lado é igual a $2r$. O ponto O é seu baricentro, logo



$$OC = (2/3)CM$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AMC , temos:

$$CM^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2 \quad \text{ou} \quad CM = r\sqrt{3} \quad \text{ou}$$

$$OC = (2/3)r\sqrt{3}.$$

Como $OC = OP - PC = R - r$, temos que

$$R - r = (2/3)r\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r = (2\sqrt{3} - 3)R.$$

Esse valor deve ser calculado considerando-se a precisão dos instrumentos de medida usados na indústria. Se, por exemplo, trabalhamos com décimos de milímetro e $R = 10,00$ cm, deveremos ter

$$r = 0,464 \times R = 4,64 \text{ cm}.$$

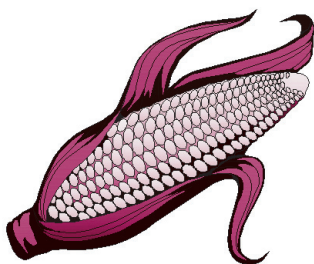
A capacidade do graneleiro

Adaptado do artigo de
Antonio Acra Freiria

Geraldo Garcia Duarte Júnior

Histórico

Fomos procurados por diretores da Cooperativa de Laticínios e Agrícola de Batatais Ltda., que nos contaram o seguinte “caso” – o milho produzido pelos cooperados é guardado (a granel) num armazém denominado graneleiro. Construído há 30 anos, embora de sólida e perfeita construção, o mesmo carecia de especificações precisas sobre sua forma e capacidade.



O volume do milho armazenado depende de vários fatores, tais como: temperatura ambiente, umidade e as impurezas que rotineiramente são colhidas com os grãos de milho. Por isso os agrônomos responsáveis pela cooperativa descontam do cooperado, “a priori”, um percentual variável de 4% a 5% do milho depositado. Na entressafra, quando o milho é vendido e retirado do graneleiro, a “sobra” é rateada entre os cooperados. Até então, todos estavam satisfeitos com o critério adotado.

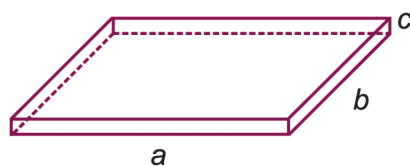
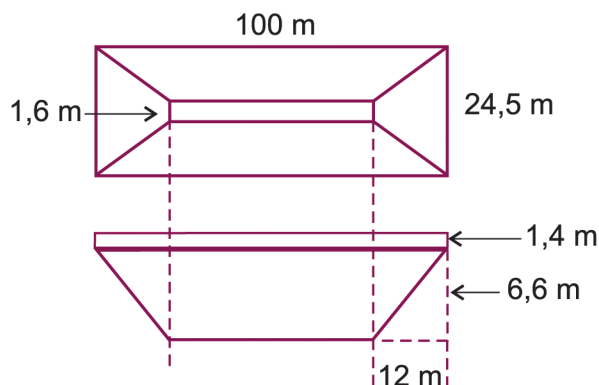
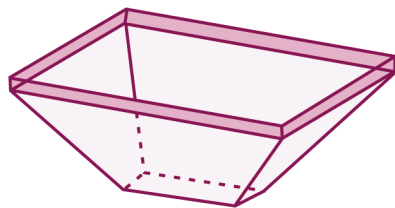
Contudo, na entressafra do ano da consulta, a repetição do processo resultou numa “falta” de

aproximadamente 5% do milho depositado. O fato, evidentemente, desagradou a todos e despertou nos diretores a necessidade de estabelecer, com precisão, a forma e a capacidade do graneleiro.

Visitamos então a cooperativa, fazendo o levantamento dos dados e, depois, apresentamos uma solução à moda de Arquimedes, que consiste essencialmente em exaurir o sólido por meio de volumes conhecidos.

Os cálculos

O graneleiro tem forma poliédrica, com as dimensões indicadas no desenho. Com um corte horizontal, destacamos do sólido um paralelepípedo retângulo:



$$\begin{aligned} a &= 100 \\ b &= 24,5 \\ c &= 1,4 \end{aligned}$$

$$V_1 = a \times b \times c$$

Da parte restante, com dois cortes transversais, destacamos um prisma de base trapezoidal:

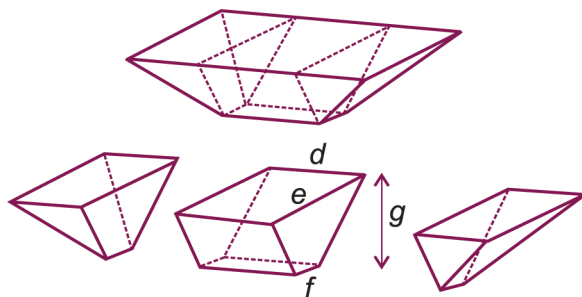
$$d = 100 - 2 \times 12 = 76$$

$$e = 24,5$$

$$f = 1,6$$

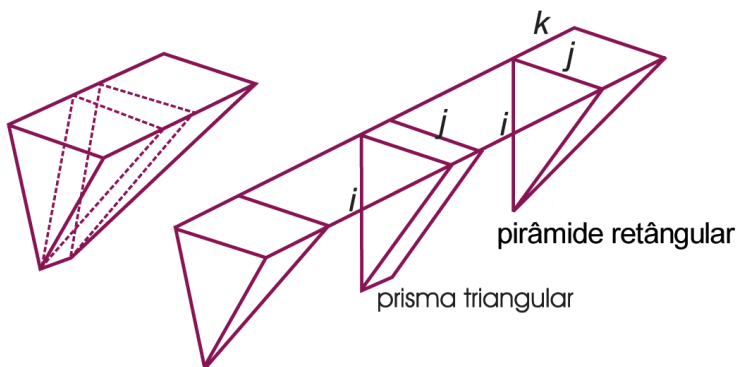
$$g = 6,6$$

$$V_2 = \frac{f + e}{2} \times g \times d$$



prisma trapezoidal

As pontas que restam são simétricas. Cada uma delas pode ser decomposta em um prisma de base triangular e duas pirâmides (simétricas) de base retangular:



$$h = 1,6$$

$$i = g = 6,6$$

$$j = 12$$

$$k = \frac{24,5 - 1,6}{2} = 11,45$$

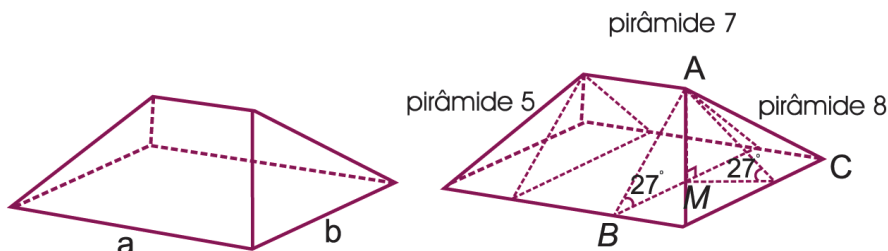
$$V_3 = \frac{i \times j}{2} \times h$$

$$V_4 = \frac{j \times k \times i}{3}$$

Assim, o volume do graneleiro é dado por:

$$V_G = V_1 + V_2 + 2(V_3 + 2V_4).$$

Efetuosos os cálculos, obtém-se: $V_G = 11\,311,72\,m^3$. Esse é o volume de milho que o depósito comporta quando raso. É possível armazenar mais milho ainda, acima da “boca”, formando-se um monte de forma também poliédrica:



$$V_s = V_5 + V_6 + V_7$$

O ângulo de inclinação das faces laterais (em relação ao retângulo de lados a e b), chamado ângulo de acatamento do milho, é fornecido pelos manuais: 27° . Com este dado e novos cortes, pode-se calcular o volume do poliedro V_s como a seguir.

No $\triangle ABM$: $AM = \frac{b}{2} \times \operatorname{tg} 27^\circ$.

Como $\triangle ABM = \triangle ACM$, resulta $CM = BM = b/2$.

Então:

$$V_5 = V_6 = \frac{1}{3} \times b \times CM \times AM$$

$$V_7 = \frac{b \times AM}{2} \times (a - 2 \times CM)$$

Efetuados os cálculos, obtém-se o volume suplementar de milho:

$$V_s = 7028,18 \text{ m}^3 ;$$

logo o volume total é $V_G + V_s = 11311,72 + 7028,18 = 18\,339,90$.

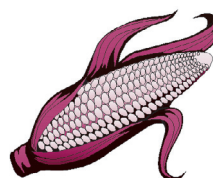
O peso específico do milho (fornecido pelos manuais teóricos) é $0,750 \text{ t/m}^3$.

Logo, a capacidade total do graneleiro é:

$$C_r = 18\,339,90 \times 0,750 \approx 13\,755 \text{ t}$$

Conclusão

Esses cálculos elementares permitiram determinar a capacidade do graneleiro, e assim foi possível comprovar o desaparecimento de aproximadamente 12 000 sacas de milho da Cooperativa na entressafra. Contudo, até o momento da redação destas notas, não se tinha notícia nem das sacas e nem de como elas desapareceram do graneleiro!



Fulerenos e futebol: aplicações da fórmula de Euler

Adaptado do artigo de
Luis Fernando Mello

Em 1982, a seleção brasileira de futebol encantava os amantes da arte futebolística, na Copa do Mundo realizada na Espanha. Não era para menos, uma vez que o time contava com talentos do calibre de Júnior, Cerezo, Falcão, Sócrates e Zico.

Pouco tempo depois, em 1985, três químicos, *Harold W. Kroto*, *Robert F. Curi* e *Richard E. Smalley*, surpreenderam a comunidade científica com o anúncio da descoberta dos **fulerenos** (*Nature*, volume 318, p. 162), uma forma alotrópica de carbono e a primeira molecular, à qual deram o nome de *buckminsterfulereno* ou simplesmente C_{60} . (NR)



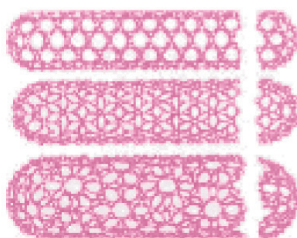
Em 1996, Kroto, Curi e Smalley foram laureados com o Prêmio Nobel de Química. Dois anos antes éramos tetracampeões mundiais de futebol na Copa dos Estados Unidos, com um time esforçado, que não encantava e tinha apenas um grande destaque: o baixinho Romário.

Do ponto de vista químico, o C_{60} nada mais é do que uma molécula formada por 60 átomos de carbono, com cada um desses átomos ligado a três outros.

Do ponto de vista matemático, a estrutura das ligações desses 60 átomos de carbono forma um poliedro convexo, cujos 60 vértices são exatamente os átomos de carbono, e as arestas, suas ligações químicas.

As faces desse poliedro são hexágonos e pentágonos. Depois do C_{60} , outros fulerenos foram descobertos, tais como C_{70} , C_{76} , C_{240} , C_{540} ,..., em que os subíndices correspondem ao número de átomos de carbono.

Estudando a síntese de quantidades macroscópicas de fulerenos, *Sumio Iijima*, em 1991, descobriu outros tipos de moléculas de carbono e as denominou *nanotubos*: tubos cilíndricos de diâmetros da ordem de 8 nm a 15 nm (1 nm é igual a $10^{-9}m$), empacotados um dentro do outro, como diversas camadas de uma cebola, e com as extremidades fechadas por hemisférios fullerênicos.



Exemplos de nanotubos

(figura da internet: omnis.if.ufrj.br/~capaz/ffnc/home.html)

Mas nem tudo eram flores naquela época. Em 1990, nossa seleção nacional fracassava nas fases iniciais da Copa do Mundo da Itália.

Recentemente foi descoberto que os nanotubos são flexíveis e mais resistentes que qualquer aço, e têm propriedades elétricas especiais, sendo, por exemplo, melhores condutores elétricos que o cobre. Várias aplicações envolvendo os nanotubos já estão sendo implementadas (veja *Scientific American Brasil*, número 1, p. 41).

A fórmula de Euler

Do ponto de vista matemático, a estrutura das ligações dos átomos de carbono dos fulerenos (nanotubos) forma um poliedro convexo, cujos vértices são tais átomos.

Podemos então utilizar a conhecida fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + F = 2, \quad (1)$$

para saber um pouco mais a respeito dessas estruturas, lembrando que V é o número de vértices, A é o número de arestas, e F é o número de faces do poliedro.

Uma belíssima aplicação da fórmula (1), no contexto da Teoria dos Grafos, está na sua utilização na demonstração do Teorema das Cinco Cores: Todo mapa pode ser colorido com no máximo cinco cores (veja J. L. Gersting, *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, 4ª edição, LTC Editora, p. 253).

Uma consequência interessante da fórmula de Euler

Se um poliedro convexo possui apenas faces hexagonais e pentagonais e, em cada vértice, incidem exatamente 3 arestas, então ele possui exatamente 12 faces pentagonais.

Para mostrar esse resultado, observamos primeiro que: cada face hexagonal do poliedro possui 6 arestas em sua fronteira, cada face pentagonal possui 5 arestas em sua fronteira, e cada aresta é parte da fronteira de duas faces. Assim, se indicarmos por F_H e F_P o número de faces hexagonais e poligonais, respectivamente, teremos

$$6F_H + 5F_P = 2A. \quad (2)$$

Por outro lado, como cada aresta liga dois vértices e (por hipótese) de cada vértice partem três arestas, temos:

$$2A = 3V. \quad (3)$$

Da fórmula de Euler (1) segue então que $V - A + F_H + F_P = 2$. Multiplicando por 6 e usando (2) e (3), obtemos:

$$F_P = 12.$$

Nas moléculas de fulerenos e nanotubos, cada átomo liga-se exatamente a 3 átomos de carbono e podemos, portanto, concluir do resultado que elas têm que possuir exatamente 12 faces pentagonais.

E o futebol?

A essa altura do campeonato você pode estar indagando o que toda essa história de poliedro convexo, fullereno e nanotubo tem a ver com futebol. Uma rápida olhada nos jogos transmitidos pela televisão, ou mesmo no seu armário, será suficiente para se convencer de que, de fato, essas coisas estão relacionadas. Você já reparou que alguns modelos de bolas de futebol são fabricados com gomos hexagonais e pentagonais? Dê uma olhada! Agora, um tal modelo de bola de futebol nada mais é do que um poliedro convexo com faces hexagonais e pentagonais inflado.



C_{60} com seus 60 vértices,
32 faces e 90 arestas

Como os gomos são polígonos regulares, é possível demonstrar que de cada vértice partem exatamente três arestas e concluir, pela consequência da fórmula de Euler demonstrada no item anterior, que devem existir 12 gomos pentagonais. A palavra *pentagonal* lembra *pentacampeonato*. E foi com um modelo de bola de futebol com gomos hexagonais e pentagonais que Ronaldo, Rivaldo e Ronaldinho Gaúcho fizeram o que fizeram na conquista do pentacampeonato mundial de futebol na Copa da Coreia e do Japão, em 2002.

Nota

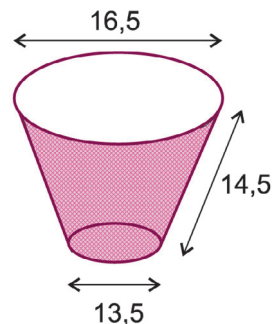
O nome é uma homenagem a *Richard Buckminster Fuller* (1895-1983), engenheiro, arquiteto, escritor e educador americano, famoso pela originalidade de suas idéias. Entre suas criações arquitetônicas, destaca-se a cúpula geodésica, uma estrutura formada por polígonos regulares, que se apoia diretamente no solo sem necessidade de bases ou pilares e pode ser construída em proporções ilimitadas. Essa estrutura possui ainda grande estabilidade, o que levou Fuller a prever sua ocorrência na natureza, conforme mais tarde constatado em microorganismos e nas moléculas das quais trata este artigo.

Como cortar o pano para revestir o cesto?

Adaptado do artigo de
Luiz Márcio Imenes

Conheci a Gladys, que também é professora, num curso promovido pela PUC de Porto Alegre. Por duas razões, lembro-me bem de um dia em que fui à sua casa. A companhia de sua família e o almoço estavam uma delícia. Além disso, ela me propôs um interessante problema.

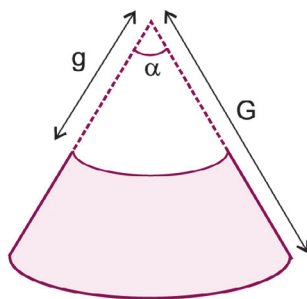
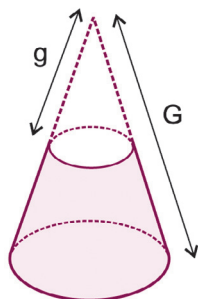
Sua amiga Irene estava vendendo alguns objetos que ela mesma decorava. Eram peças para o enxoval de bebês. Ela forrava e enfeitava latas de talco, vidros para cotonetes, berços, etc. O problema surgiu quando quis revestir um cesto com a forma e as dimensões (em centímetros) indicados na figura.



Como fazer o molde para cortar o pano, de modo a revestir sua superfície lateral?

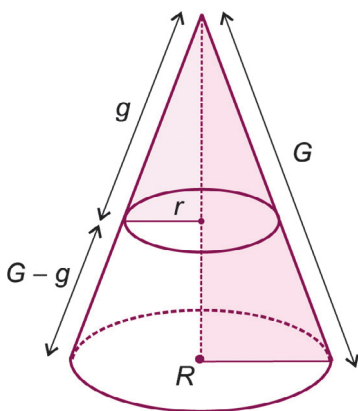
Vamos resolver o problema.

O cesto tem a forma de um tronco de cone de bases paralelas.



A planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular, cujo raio é a geratriz do cone, e a planificação da superfície lateral do tronco de cone é um setor (pedaço) de coroa circular.

Este setor dará a forma do molde. Para desenhá-lo, precisamos conhecer os raios G e g além do ângulo central α .



Os triângulos indicados na figura são semelhantes, portanto

$$\frac{G}{R} = \frac{g}{r} \Rightarrow G = \frac{R}{r} g.$$

Como $2R = 16,5$ e $2r = 13,5$ resulta $G = \frac{11}{9} g$.

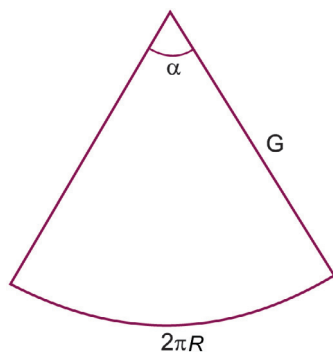
Mas $G - g = 14,5$, donde

$$\frac{11}{9} g - g = 14,5 \Rightarrow g = 65,2 \text{ cm} \Rightarrow G = 79,7 \text{ cm}.$$

Para obter o ângulo central α , devemos notar que o arco de raio G , subtendido por ele, tem comprimento igual ao da circunferência de raio R .

Logo,

$$\alpha = \frac{2\pi R}{G} \text{ rad} = \frac{\pi \times 16,5}{79,7} \text{ rad} \cong 37^\circ 30'.$$



Uma construção geométrica e a PG

Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima

Dados os números reais a, r , com $0 < r < 1$, seja

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

a soma dos termos da progressão geométrica ilimitada, cujo primeiro termo é a , e cuja razão é r .

Temos:

$$S = a + r(a + ar + ar^2 + \dots) = a + rS,$$

donde $S - rS = a$ e daí $S = \frac{a}{1-r}$.

Não há geometria alguma nesse raciocínio, embora a progressão se chame *geométrica*.

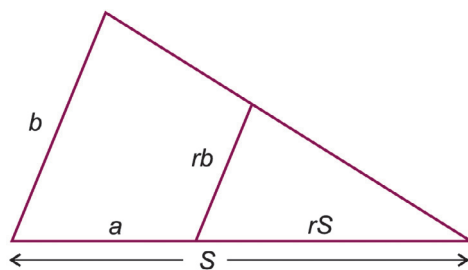
Mas, dados $a > 0$ e $0 < r < 1$, podemos construir geometricamente a soma

$S = a + ar + ar^2 + \dots$, do seguinte modo:

Tomamos um segmento de comprimento a e, a partir de uma de suas extremidades, outro segmento, com um comprimento b , arbitrário. Na outra extremidade, traçamos um segmento paralelo a b , de comprimento rb .



A reta que liga as extremidades livres dos segmentos be encontra o prolongamento de a num ponto que dista exatamente S da primeira extremidade de a .



A figura ao lado diz mais do que as palavras.

Explicação

Os triângulos de bases b e rb na figura são semelhantes. A razão de semelhança é r . Logo, o segmento adjacente a a mede rS , ou seja,

$$S = a + rS, \text{ donde } S = a/(1 - r) = a + ar + ar^2 + \dots$$

Uma construção análoga fornece um segmento de comprimento

$$S' = a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots + (-1)^n ar^n + \dots$$

Neste caso, temos

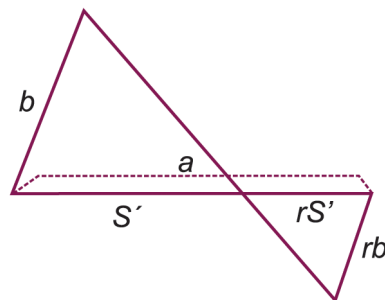
$$S' = a - r(a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots),$$

ou seja,

$$S' = a - rS' \text{ e daí } S' = a/(1 + r).$$

A construção de S' é dada na figura ao lado.

Os segmentos b e rb são paralelos, traçados a partir das extremidades do segmento a , porém em sentidos opostos. Os dois triângulos da figura são semelhantes, e a razão de semelhança é r .



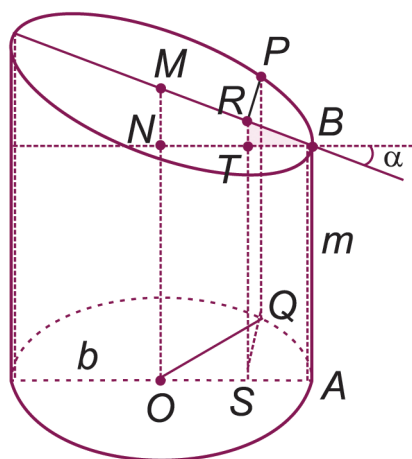
Logo, se chamarmos S' a base do triângulo maior, a base do menor será rS' . Portanto, $a = S' + rS'$ e daí

$$S' = a/(1 + r) = a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots$$

Corte e costura

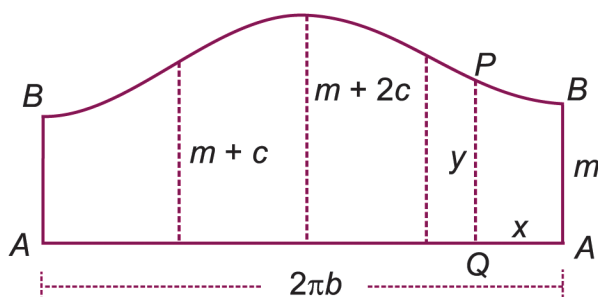
Adaptado do artigo de
Ernesto Rosa Neto

Se a professora ou professor, por motivo particular, deseja mudar de ramo, sem se afastar do visgo da Matemática, aqui vai uma colaboração. Como cortar uma manga (de camisa)?



Uma manga é um tronco de cilindro, dependendo do modelo. A secção é uma elipse, cujo plano possui uma inclinação de um ângulo α em relação à base. Precisamos medir b , que é a circunferência do braço dividida por 2π , e α , que dá a inclinação. O comprimento da parte interna da manga é m . Vamos fazer o corte em função de b , α e m .

Para cada ponto P da figura, vamos calcular a altura $y = PQ$ em função do arco AQ , de medida x . Para isto, calculemos TR em função de x :

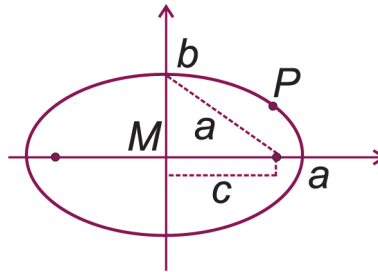


Nos triângulos *BRT* e *MNT* temos:

$$\cos \alpha = \frac{TB}{RB} = \frac{NB}{MB} = \frac{OA}{MB} = \frac{b}{MB} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{MB^2}{b^2}.$$

$$\text{Fazendo } MB = a, \text{ temos } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b},$$

onde c é a semidistância focal da elipse de semi-eixos a e b .



$$TR = TC \operatorname{tg} \alpha = SA \operatorname{tg} \alpha = (AO - OS) \operatorname{tg} \alpha =$$

$$(b - b \cos x) \cdot c/b = c(1 - \cos x), \text{ logo,}$$

$$y = QP = SR = ST + TR = m + c(1 - \cos x) \Rightarrow y = m + c - c \cos x.$$

Portanto, uma elipse se “desenrola” numa cossenóide. Isso pode ser concretizado também em cartolina, que é molde para corte.

Um modelo em madeira, molhado com tinta, deixa a marca característica no papel.

Se o professor pretende mudar, deve tomar medidas!



Elipse, sorrisos e sussuros

Adaptado do artigo de
Renato J. C. Valladares

*Ao lermos o artigo *Por que as antenas são parabólicas* de Eduardo Wagner sobre as antenas parabólicas, baseado na propriedade bisetora da parábola, não podemos deixar de lembrar que as elipses também têm uma propriedade similar.*

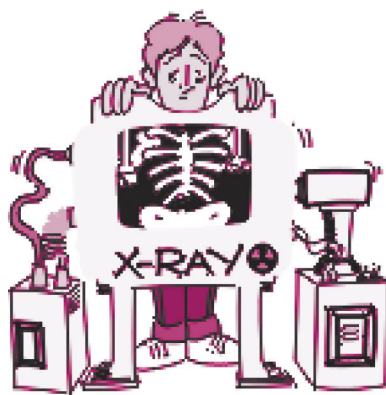
Essa propriedade é usada na construção de refletores odontológicos, aparelhos de emissão de certos raios usados em medicina ou nas salas de sussurros existentes “.... em certos museus americanos de ciência e nos castelos de alguns monarcas europeus excêntricos...”.

Por outro lado, para cuidar do sorriso dos pacientes, muitos dentistas usam uma luminária com espelho elíptico que possui a propriedade de concentrar os raios luminosos em um ponto, que é ajustado pelo dentista para iluminar o dente que está sendo tratado. Conseguem-se, assim, duas vantagens:

A primeira é concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando, e a segunda é evitar que os raios luminosos ofusquem o paciente, o que aumentaria o desconforto causado pelo tratamento dentário.



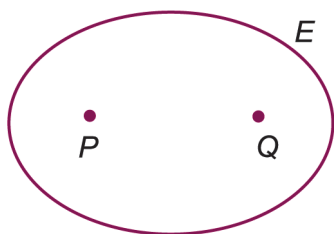
De maneira diferente dos holofotes comuns, como os faróis de carro, que refletem os raios luminosos em uma mesma direção (valendo-se, para isso, de um espelho parabólico), os holofotes dentários se valem de espelhos elípticos para concentrar os raios luminosos emitidos pela lâmpada em um determinado ponto.



Isso ocorre devido à *propriedade refletora da elipse*, que também explica o funcionamento de diversos aparelhos de emissão de raios usados em tratamentos médicos, como, por exemplo, o de radioterapia, cujos raios devem destruir os tecidos doentes, sem afetar os tecidos sadios que se encontram ao redor.

Já as salas de sussurros são construções de forma oval, onde estão marcados dois pontos no chão. Duas pessoas em pé, uma em cada um desses pontos, podem se comunicar em voz sussurrada, inaudível no restante da sala. Isso também decorre da propriedade refletora da elipse.

A forma da sala é de fundamental importância. Ao projetá-la, fixam-se dois pontos P e Q , que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, toma-se uma elipse E que admita P e Q como focos, e a sala é construída de tal maneira que *qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala, segundo uma elipse congruente com a escolhida*. Na figura ao lado mostramos uma seção da sala dos sussurros, por um plano que passe por P e Q .



Isso possibilita desenvolver todo o nosso estudo na elipse E que, por ser uma figura plana, pode ser considerada em um plano previamente fixado.

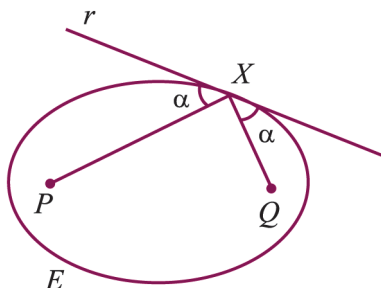
Pela própria definição de elipse, a soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é constante. Assim, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos *que, ao se refletirem nas paredes da sala, cheguem ao segundo foco*, terão percorrido a mesma distância e, por isso, chegarão ao mesmo tempo. Já a *propriedade bisetora* garante que *todo som*

emitido em um dos focos se dirigirá após a reflexão exatamente para o outro foco.

Assim, conjugando essas duas propriedades, concluímos que *todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco*, o que, sem dúvida, proporciona uma amplificação natural do som, explicando o funcionamento das salas de sussurros. Passemos então a estudar a propriedade bisetora da elipse.

Propriedade bisetora da elipse

Seja uma elipse E com focos P e Q e seja um ponto $X \in E$. Nesse caso a reta r , tangente a E em X , forma ângulos iguais com os raios focais PX e QX .



A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada, por exemplo, no número 36 da Revista do Professor de Matemática, e se baseia em duas leis físicas sobre a reflexão:

1. O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão em um plano são iguais.
2. A reflexão em cada ponto de uma superfície comporta-se como se fosse no plano tangente à superfície, no respectivo ponto.