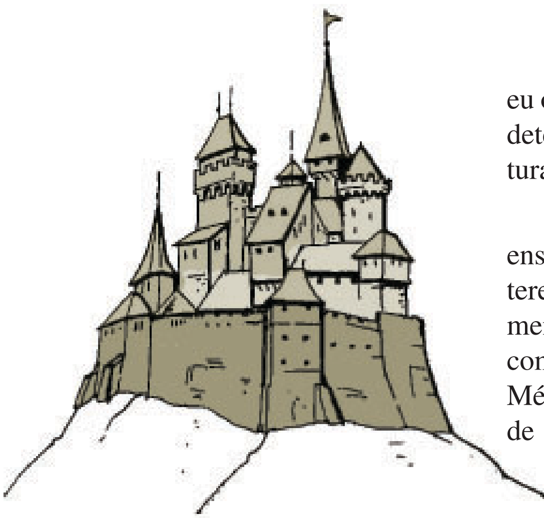
Capítulo 4

História

Uma aula de Matemática no ano 1000

Ana Catarina P. Hellmeister



Introdução

Estávamos no ano 2000 e uma pergunta que eu ouvia com freqüência era: "Como será que era determinada coisa (a medicina, o teatro, a literatura, o ensino, ...) no ano 1000?"

Vamos tentar dar alguma idéia de como era o ensino da Matemática, que afinal é o que nos interessa, no ano 1000 e pouco antes dele. Obviamente este artigo não é, nem de longe, um texto completo sobre o ensino da Matemática na Idade Média. Tem apenas a intenção de mostrar alguns de seus aspectos interessantes.

I. Rosvita

Vamos começar, talvez por feminismo, apresentando *Rosvita*, uma monja beneditina do convento de Gandersheim, norte de Göttingen, Alemanha, que viveu aproximadamente de 935 a 1002, e é considerada a primeira poetisa da literatura alemã. Ela nasceu, muito provavelmente, em uma família aristocrata, e há registros de que seu nome aparece numa gravura esculpida em madeira como Helena von Rossow.

Rosvita ingressou muito jovem no convento de Gandersheim, famoso centro de estudos, onde seu extraordinário talento encontrou abrigo e cultivo criterioso. Inicialmente Rosvita foi orientada por um professor e posteriormente ficou sob a supervisão de uma sobrinha de Otto I (monarca da época) de nome Gerberg, considerada a mulher modelo de seu tempo. Gerberg, que foi abadessa do convento entre 959 e 1001, tinha um interesse especial pela obra poética de Rosvita, a qual, segundo a abadessa, "contribuiria para o engrandecimento da glória de Deus".

A. Dürer, A monja Rosvita apresenta um livro a Oto I. (Kupferstichkabinett, Berlin)

Não cabe aqui, numa revista para professores de Matemática, discorrer com maiores detalhes sobre a extensa obra literária de Rosvita, uma das mais importantes da Idade Média. Focalizaremos uma em especial, a peça *Sabedoria*, que contém uma aula de Matemática para jovens estudantes, que, pelo seu espírito motivador e bem-humorado, serviria de exemplo (quem diria, uma peça de 1000 anos atrás!) para nós, professores, preocupados com o ensino de Matemática.

Antes de comentar a peça em particular, para melhor ligar Rosvita à Matemática, vamos transcrever um trecho do livro *Cuentos y cuentas de los matematicos*, de Rodriguez Vidal, R. e Rodriguez Rigual, M. C. Editorial Reverte, 1986, p. 137.

"[...]A idade média na Europa não islâmica limita seus conhecimentos de Matemática aos textos comentados de Alexandria e Bizâncio, sem que apareçam indícios de criação original. Desta época são os escritos de Rosvita, monja de um convento alemão, do século X, mais interessantes como literatura e filosofia do que como Matemática. Entretanto demonstram bom conhecimento da *Arithmetica* de Boécio e aludem a questões relativas a números deficientes e perfeitos, citando o 6, 28, 496 e 8128, que eram os números perfeitos conhecidos na sua época. O número perfeito seguinte é 33 550 336 [...]".

Há divergências entre os historiadores sobre se as peças teatrais escritas por Rosvita eram mesmo encenadas ou se seriam meros textos didáticos, nada tendo a ver com o teatro. Lembrando que o ensino na Idade Média era ministrado quase que exclusivamente nos mosteiros, sem dúvida, encenados ou não, os textos de Rosvita tinham claros propósitos didáticos, como é possível perceber em *Sabedoria*, que passamos a transcrever do livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J.

Enredo da peça:

Paixão das santas virgens Fé, Esperança e Caridade. Foram levadas à morte pelos diversos suplícios a que as submeteu o imperador Adriano em presença da sua santa mãe, Sabedoria, que, com seus maternos conselhos, as exortou a suportar os sofrimentos.

Consumado o martírio, sua santa mãe, Sabedoria, tomou de seus corpos e, ungindo-os com bálsamo, deu-lhes sepultura de honra a três milhas de Roma. Ela, por sua vez, no quarto dia, após a oração sacra, enviou também seu espírito ao céu.

Vamos transcrever apenas o trecho da peça que traz a lição de Matemática. Trata-se de um diálogo entre Sabedoria e o imperador Adriano:

Adriano: Dize, que vieste fazer entre nós?

Sabedoria: Nenhuma outra coisa a não ser conhecer a doutrina da verdade para o aprendizado mais pleno da fé que combateis e para consagrar minhas filhas a Cristo.

Adriano: Dize os nomes delas.

Sabedoria: A primeira se chama Fé; a segunda, Esperança; a terceira, Caridade.

Adriano: Quantos anos têm?

Sabedoria: (sussurrando) Agrada-vos, ó filhas, que perturbe com problema aritmético a este tolo?

Fé: Claro, mamãe. Porque nós também ouviremos de bom grado.

Sabedoria: Ó Imperador, se tu perguntas a idade das meninas: Caridade tem por idade um número deficiente que é parmente par; Esperança, também um número deficiente, mas parmente ímpar; e Fé, um número excedente, mas imparmente par.

Adriano: Tal resposta me deixou na mesma: não sei que números são!

Sabedoria: Não admira, pois, tal como respondi, podem ser diversos números e não uma única resposta.

Adriano: Explica de modo mais claro, senão não entendo.

Sabedoria: Caridade já completou 2 olimpíadas; Esperança, 2 lustros; Fé, 3 olimpíadas.

Adriano: E por que o número 8, que é 2 olimpíadas, e o 10, que é 2 lustros, são números deficientes? E por que o 12 que completa 3 olimpíadas se diz número excedente?

Sabedoria: Porque todo número cuja soma de suas partes (isto é, seus divisores) dá menor que esse número chama-se deficiente, como é o caso do 8. Pois os divisores de 8 são: sua metade – 4, sua quarta parte – 2, e sua oitava parte – 1; que somados dão 7. Assim também o 10, cuja metade é 5; sua quinta parte é 2; e sua décima parte, 1. A soma das partes do 10 é, portanto, 8, que é menor que 10. Já o contrário se diz número excedente, como é o caso do 12. Pois sua metade é 6; sua terça parte, 4; a quarta parte, 3; a sexta parte, 2; e a duodécima parte, 1. Somadas as partes dão 16.

Quando porém o número não é maior nem menor que a soma de suas diversas partes, então esse número é chamado número perfeito.

É o caso do 6, cujas partes – 3, 2 e 1 – somadas dão o próprio 6. Do mesmo modo, o 28, 496 e 8128 também são chamados números perfeitos.

Adriano: E quanto aos outros números?

Sabedoria: São todos excedentes ou deficientes.

Adriano: E o que é um número parmente par?

Sabedoria: É o que se pode dividir em duas partes iguais e essas partes em duas iguais, e assim por diante até que não se possa mais dividir por 2 porque se atingiu o 1 indivisível. 8 e 16, por exemplo, e todos que se obtenham a partir da multiplicação por 2 são parmente pares.

Adriano: E o que é parmente ímpar?

Sabedoria: É o que se pode dividir em partes iguais, mas essas partes já não admitem divisão (por 2). É o caso do 10 e de todos os que se obtêm multiplicando um número ímpar por 2. Difere, pois, do tipo de número anterior, porque, naquele caso, o termo menor da divisão é também divisível; neste, só o termo maior é apto para a divisão.

No caso anterior, tanto a denominação como a quantidade são parmente pares; já aqui, se a denominação for par, a quantidade será ímpar; se quantidade for par, a denominação será ímpar.

Adriano: Não sei o que é isto de denominação e quantidade.

Sabedoria: Quando os números estão em "boa ordem", o primeiro se diz menor e o último, maior. Quando, porém, se trata da divisão, denominação é quantas vezes o número se der. Já o que constitui cada parte, é o que chamamos quantidade.

Adriano: E o que é imparmente par?

Sabedoria: É o que – tal como o parmente par – pode ser dividido não só uma vez, mas duas e, por vezes, até mais. No entanto, atinge a indivisibilidade (por 2) sem chegar ao 1.

Adriano: Oh! Que minuciosa e complicada questão surgiu a partir da idade destas menininhas!

Sabedoria: Nisto deve-se louvar a supereminente sabedoria do Criador e a Ciência admirável do Artífice do mundo: pois não só no princípio criou o mundo do nada, dispondo tudo com número, peso e medida; como também nos deu a capacidade de poder dispor de admirável conhecimento das artes liberais até mesmo sobre o suceder-se do tempo e das idades dos homens.

Observem que os números parmente pares são as nossas potências de 2, os parmente ímpares são aqueles que são o dobro de um ímpar; os imparmente pares são os produtos de um ímpar por um parmente par. Denominação e quantidade são os atuais quociente e divisor.

Uma fala de Sabedoria que também chama atenção é sua afirmativa de que todos os números, além de 6, 28, 496 e 8128, são excedentes ou deficientes. Isso mostra o desconhecimento, por parte dos estudiosos da época da obra os *Elementos*, de Euclides, que contém, no livro IX, a demonstração de que qualquer número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito se $2^n - 1$ for primo. Com esse resultado, já para $n = 13$, obtém-se o próximo perfeito que é o número 33 550 336. Essa perda de contato com os ensinamentos de Euclides ficará bastante evidente nos problemas de geometria da seção a seguir.

II. Já existia Educação Matemática no século VIII

Ainda para mostrar que na Idade Média se entendia de ensino de Matemática, voltemos um pouco no tempo, mudando o século e os personagens.

É extremamente interessante a seleção de *Problemas para aguçar a inteligência dos jovens*, encontrada em *Patrologiae cursus completus*, *séries latina*, atribuída a Beda, qualificado de *O Venerável*, que nasceu e viveu na Inglaterra entre 673 e 735, tornando-se um dos maiores professores das escolas religiosas medievais. As soluções apresentadas também estão em *Patrologiae cursus completus*, *séries latina* (ver livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J.) e são algumas atribuídas a Beda, e outras a Alcuíno (séculos VIII-IX).

Os enunciados dos problemas traduzem bem a cultura popular da época, com a pouca Matemática que se conhecia apresentada e ensinada de modo atraente e bem-humorado, privilegiando o desenvolvimento da inteligência dos alunos, como pretendemos fazer hoje. Também já contemplavam a idéia hoje muito difundida de usar situações do cotidiano como motivadores do aprendizado.

Vejamos, então, alguns dos problemas da seleção de Beda, encontrados no livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J., que certamente surpreenderão muitos dos leitores que acreditam que certos problemas e soluções são de épocas mais recentes.

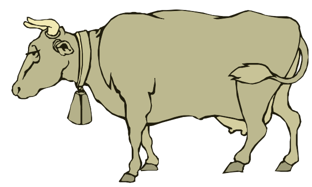
1. Problema do lobo, da cabra e da couve

Certo homem devia passar, de uma a outra margem de um rio, um lobo, uma cabra e um maço de couves. E não pôde encontrar outra embarcação, a não ser uma que só comportava dois entes de cada vez, e ele tinha recebido ordens de transportar ilesa toda a carga. Diga, quem puder, como fez ele a travessia?

Solução

Não apresentamos a solução por ser bem conhecida, pois esse problema é proposto até hoje em diferentes versões. O surpreendente é que seja tão antigo.

2. Problema do boi:



Um boi que está arando todo o dia, quantas pegadas deixa ao fazer o último sulco?

Solução

Nenhuma em absoluto. Pois o boi precede o arado e o arado segue o boi; e, assim, todas as pegadas que o boi faz na terra trabalhada, o arado as apaga. E, deste modo, não se encontrará nenhuma pegada no último sulco.

Este problema mostra bem o espírito brincalhão da época.

3. Problema da escada de 100 degrau.

Numa escada de 100 degraus, no 1º degrau está pousada 1 pomba; no 2º, 2; no 3º, 3; no 4º, 4; no 5º, 5; e assim em todos os degraus até o 100º. Diga, quem puder, quantas pombas há no total?

Solução

Calcule assim: tome a pomba do 1º degrau e some-a às 99 do 99º, o que dá 100. Do mesmo modo, as do 2º com as do 98º somam 100. E assim, degrau por degrau, juntando sempre um de cima com o correspondente de baixo, obterá sempre 100. Some tudo junto com as 50 do 50º degrau e as 100 do 100º degrau que ficaram de fora, e obter-se-á 5 050.

Reconhecem aqui os leitores a famosa solução de Gauss, aos sete anos de idade, respondendo ao problema de somar $1 + 2 + ... + 100$?

4. Problema dos dois caminhantes que viram cegonhas

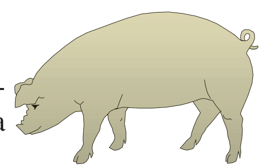
Dois homens andando pelo caminho viram cegonhas e disseram entre si: "Quantas são?" E, contando-as, disseram: Se fossem outras tantas, e ainda outras tantas; e, se somasse metade de um terço do que deu e ainda se acrescentassem mais duas, seriam 100.

Diga, quem puder, quantas cegonhas foram vistas por eles inicialmente?

Solução

28. Pois 28 com 28 e 28 dá 84. Metade de um terço, 14, que somado com 84, dá 98, que, acrescido de 2, resulta 100.

5. Problema do comprador:



Disse certo negociante: "Quero com 100 denários comprar 100 suínos; mas cada porco custa 10 denários, cada leitoa, 5, e cada 2 porquinhos, 1 denário."

Diga, quem entendeu, quantos porcos, leitoas e porquinhos devem ser comprados para que o preço seja exatamente 100 denários, nem mais nem menos?

Solução

9 leitoas e 1 porco custam 55 denários e 80 porquinhos, 40. Já temos 90 suínos por 95 denários. Com os restantes 5 denários compram-se 10 porquinhos.

6. Problema da tela:

Tenho uma tela de 100 cúbitos de comprimento e de 80 de largura. Quero daí fazer telinhas de 5 por 4.

Diga pois, ó sabido, quantas telinhas podem-se fazer?

Solução

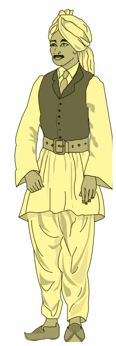
De 400, 5 é a octogésima parte e 4, a centésima parte. Seja 80 multiplicado por 5, ou 100 por 4, sempre encontrará 400.

Problemas como o 4, 5 ou 6 eram resolvidos sem equações, incógnitas, etc., recursos desconhecidos na época, mas por processos de tentativa. É interessante observar que esse procedimento medieval é bastante recomendado pelos educadores de hoje para incentivar o raciocínio e a criatividade dos estudantes.

O problema a seguir mostra que as soluções obtidas por tentativa nem sempre eram completas, deixando de lado alternativas válidas.

7. Certo pai de família tinha 100 dependentes, a quem mandou distribuir 100 medidas de provisões do seguinte modo: que os homens recebessem 3 medidas; as mulheres, 2; e as crianças, meia. Diga, quem for capaz, quantos homens, mulheres e crianças eram?

Solução



11 vezes 3 dá 33; 15 vezes 2, 30; 74 vezes meio, 37. 11 vezes mais 15 mais 74 é 100; e, do mesmo modo, 33 mais 30 mais 37.

Hoje, usando equações e incógnitas, faríamos:

h: número de homens.

m: número de mulheres.

c: número de crianças

Então,

$$h + m + c = 100$$

$$3h + 2m + c/2 = 100,$$

que implica $100 = 5h + 3\text{m}$, que fornece as soluções:

$h = 20,\quad m = 0,\quad c = 80$

$h = 17,\quad m = 5,\quad c = 78$

$h = 14,\quad m = 10,\quad c = 76$

$h = 11,\quad m = 15,\quad c = 74$

$h = 8,\quad m = 20,\quad c = 72$

$h = 5\ ,\quad m = 25,\quad c = 70$

$h = 2,\quad m = 30,\quad c = 68$

Os problemas 8 e 9 a seguir mostram, em suas soluções incorretas, as deficiências da época em questões de geometria, denunciando o desconhecimento dos resultados da escola grega.

8. Problema do campo triangular

Um campo triangular mede de um lado 30 pérticas, de outro também 30 e de frente 18.

Diga, quem puder, quantos aripenos [um aripeno equivale a 144 "pérticas quadradas"] compreende?

Solução

Os dois lados de 30 somados perfazem 60, cuja metade é 30, que multiplicado por 9 (que é a metade de 18) dá 270 (que é o cálculo da área em "pérticas quadradas"). Para expressar a área em aripenos é necessário dividir por 144 etc.

Observem que no cálculo da área do triângulo, a medida da altura relativa a um dos lados era substituída erroneamente pela média das medidas dos outros dois lados.

9. Problema do campo circular:

Quantos aripenos tem um campo circular de 400 pérticas de circunferência?

Solução

A quarta parte de 400 é 100; 100 multiplicado por 100 dá 10 000, que é a área. Para expressar em aripenos, divide-se por 144, etc.

Aqui a área do círculo seria dada por

$$\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \pi r^2 \ ,$$

que embute uma aproximação de π por 4, que é bastante grosseira.

Os progressos nos textos geométricos, na Idade Média, só se iniciaram com Gerberto (950-1003), mas aí já é uma outra história...

As mulheres na Matemática

Daniel C. de Morais Filho

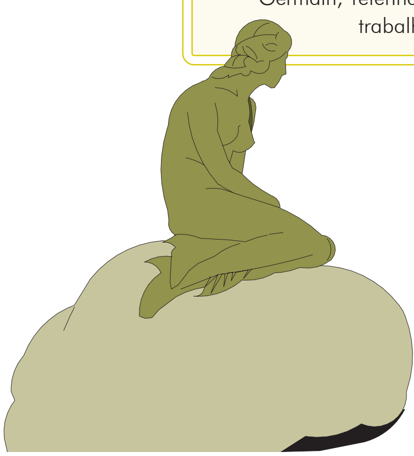
Este artigo é dedicado às abnegadas professoras do nosso imenso país.

O simples aspecto da mulher revela que ela não é destinada nem aos grandes trabalhos intelectuais, nem aos grandes trabalhos materiais.

Schopenhauer em *As Dores do Mundo* (Esboço acerca das mulheres)

Mas quando uma pessoa pertencente ao sexo no qual, de acordo com nossos costumes e preconceitos, é forçada a enfrentar infinitamente mais dificuldades que os homens para familiarizar-se com essas pesquisas dificílimas, e consegue, com êxito, penetrar nas partes mais obscuras delas, tendo, para isso, de superar todas essas barreiras, então essa pessoa tem, necessariamente, a mais nobre coragem, os mais extraordinários talentos e uma genialidade superior.

Gauss, numa carta a Sophie Germain, referindo-se ao trabalho dela.



Na Matemática a maioria das histórias que se contam são sobre matemáticos. Todos os teoremas que conhecemos em nível de primeiro e segundo graus têm nomes de matemáticos, e assim por diante, num etc. e tal inteiramente masculino.

Em vista desse fato é natural que nossos estudantes se perguntem:

"Sendo a Matemática uma ciência tão antiga, será que só homens se dedicaram a ela? Será que nenhuma mulher conseguiu registrar seu nome na Matemática? Ou será que o pensamento matemático, com sua abstração e lógica, é apenas compatível com o raciocínio masculino, afastando as mulheres dessa área?"

Nosso objetivo aqui é mostrar que as respostas a essas perguntas são negativas. De acordo com nossas possibilidades tentaremos resgatar um pouco da história feminina na Matemática. Detalharemos alguns fatos da biografia de mulheres intrépidas e notáveis, que superaram preconceitos, venceram obstáculos e conseguiram chegar, na Matemática, onde poucos homens chegaram.

ANTIGUIDADE

Hipatia de Alexandria

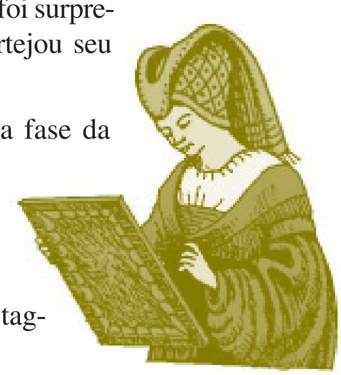
A primeira mulher da qual nos chegou registro de ter trabalhado e escrito na área da Matemática foi a grega Hipatia.

Ela nasceu em Alexandria por volta do ano 370. Da sua formação, sabe-se apenas que foi educada por seu pai, Teon, que trabalhava no famoso Museu de Alexandria. Ele ficou conhecido por seus comentários sobre o *Almagesto* de Ptolomeu, e por uma edição revista dos Elemento,s de Euclides que serviu de base às edições posteriores dessa obra. Apesar do fato de nenhum fragmento de seus escritos ter sido preservado, parece que ela deve ter ajudado seu pai nesse trabalho. Acredita-se também que Hipatia escreveu comentários sobre *As Secções Cônicas* de Apolônio, a *Aritmética* de Diofanto e sobre o *Almagesto*. Ela também inventou alguns aparelhos mecânicos e escreveu uma tábua de astronomia.

Hipatia destacou-se por sua beleza, eloqüência e cultura. Tornou-se uma filósofa conhecida, chegou a ser diretora da escola Neoplatônica de Alexandria e ministrou aulas no Museu de Alexandria. Entretanto, sua filosofia pagã (séculos depois ainda seria acusada de bruxa) e seu prestígio suscitaram a inveja de seus opositores.

O fim dessa mulher foi trágico e triste. Hipatia foi envolvida na disputa em que se encontrava o poder político e o religioso de Alexandria e foi acusada de não ter querido reconciliar as partes. Isso foi o suficiente para incitar a fúria de uma turba de cristãos fanáticos. Um dia, ao chegar em casa, Hipatia foi surpreendida por essa turba enfurecida que a atacou, a despiu e esquartejou seu corpo, matando-a de uma forma grotesca.

Com a funesta morte de Hipatia, em 415, finda-se a gloriosa fase da Matemática alexandrina.



Do século V ao século XVIII

A Matemática na Europa Ocidental entraria numa profunda estagnação, na qual nada mais seria produzido durante mil anos!

Após a morte de Hipatia existe um vazio de doze séculos em que o nome de nenhuma mulher teve seu nome registrado na história da Matemática.

Convém ressaltar, entretanto, que durante esse período, mulheres colaboraram em cálculos astronômicos e vários matemáticos famosos, tais como Viète, Descartes e Leibniz, foram convidados para serem professores de algumas nobres em suas cortes.

Século XVIII

Maria Gaetana Agnesi

Agnesi nasceu em Milão, no ano de 1718. Garota precoce e inteligente, teve uma educação esmerada preparada por seu pai, professor de Matemática na Universidade de Bolonha. Ele apresentou sua filha nas reuniões que organizava, onde se encontravam acadêmicos, cientistas e intelectuais renomados. Já aos onze anos, falava latim e grego perfeitamente, além de hebraico, francês, alemão e espanhol.

Agnesi conhecia a Matemática moderna de sua época. Tinha estudado os trabalhos de Newton, Leibniz, Euler, dos irmãos Bernoulli, de Fermat e de Descartes, além de ser versada em Física e em vários outros ramos da ciência.

Aos 20 anos ela publicou um tratado escrito em latim, *Propositiones Philosophicae*, no qual inseriu várias de suas teses e defendeu a educação superior para mulheres.

Agnesi passaria mais dez anos de sua vida dedicados ao estudo da Matemática e escreveria sua obra magna, *Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventú.* Esse foi um dos primeiros textos de Cálculo escrito de forma didática. A obra consiste em quatro grandes volumes que abordam tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais. Os volumes, publicados em 1748, somam mais de 1000 páginas.

A notoriedade de Agnesi espalhou-se rapidamente. Embora não fosse aceita na Academia francesa, já que nem poderia ser indicada por ser mulher, a Academia Bolonhesa de Ciência a aceitou como membro. Em 1749, o papa Benedito XIV conferiu-lhe uma medalha de ouro e uma grinalda de flores de ouro com pedras preciosas pela publicação de seu livro e a indicou como professora de Matemática e Filosofia Natural da Universidade da Bolonha – cátedra que nunca chegou a assumir, pois em 1752, após a morte de seu pai, ela abandonou a Ciência e assumiu uma vida religiosa.

Infelizmente Agnesi, que muitos nem imaginam ser uma mulher, ficou apenas conhecida por uma curva de terceiro grau, que leva seu nome, a chamada "Curva de Agnesi".

Sophie Germain

Sophie nasceu em uma abastada família francesa, na cidade de Paris em abril de 1776. Aos treze anos, enquanto na França explodia a Revolução, ela se confinou na imensa biblioteca da família.

Após tornar-se autodidata em Grego e Latim, estudou os trabalhos de Newton e de Euler. A oposição de seus pais foi imediata. Eles fizeram de tudo para persuadir a filha a não seguir a carreira matemática: tiraram a luz do seu quarto, confiscaram o aquecedor..., mas Sophie, persistente, continuava estudando à luz de velas, escondida embaixo dos cobertores. Sua determinação foi tanta que derrotou a oposição dos pais, que acabaram liberando seu acesso aos livros de Matemática da família.

Em 1794, a até hoje célebre École Polythecnique foi inaugurada em Paris, mas Sophie não pôde cursá-la por ser mulher. Mesmo assim, conseguiu umas notas de um curso de Análise que Lagrange acabara de ministrar naquela instituição. Fingindo ser um dos alunos da École, sob o pseudônimo de M. Le Blanc, Sophie submeteu a Lagrange umas notas que tinha escrito sobre Análise. Lagrange ficou tão impressionado com o artigo que procurou conhecer seu autor. Após descobrir a sua verdadeira autoria, tornou-se, a partir daí, seu mentor matemático.

Em 1804, após estudar o *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss, ainda escondida na figura de M. Le Blanc, ela começou a corresponder-se com ele. Em 1807 as tropas de Napoleão invadiram Hannover, uma cidade perto de onde Gauss estava. Temendo pela sua segurança de Gauss, Sophie conseguiu obter de um general que comandava o exército e era amigo da família, a promessa de mantê-lo a salvo. Um enviado do general, ao chegar até Gauss, mencionou que estava ali para protegê-lo, graças à intervenção de Mademoiselle Germain. Criou-se uma enorme confusão na cabeça de Gauss, pois seu correspondente francês era o senhor Le Blanc e não uma mulher desconhecida. Após toda a verdade ser desvendada e os fatos esclarecidos, Gauss escreveu a sua protetora uma carta de agradecimento na qual externou seu espanto pela verdadeira identidade do seu correspondente e aproveitou o ensejo para elogiar a coragem e o talento de Sophie para estudar Matemática.

Sophie resolveu alguns casos particulares do 'Último Teorema de Fermat' e em 1816 ganhou um concurso promovido pela Academia de Ciências da França, resolvendo um problema que foi proposto na época sobre vibrações de membranas. De suas pesquisas nessa área nasceu o conceito de curvatura média de superfícies que é hoje objeto de pesquisa de vários matemáticos na área de Geometria Diferencial e suas idéias sobre elasticidade foram fudamentais na teoria geral da elasticidade, criada posteriormente.

Além de Matemática, Sophie estudou Química, Física, Geografia, História, Psicologia e publicou dois volumes com seus trabalhos filosóficos. Ela continuou trabalhando em Matemática e Filosofia até sua morte, em 1831.

Século XIX

No final do século passado, à custa de árduos esforços, as mulheres começaram a estudar Matemática regularmente em algumas universidades e a obter os primeiros graus de Doutoras em Matemática. Aos poucos os preconceitos foram sendo quebrados.

Entre as mulheres matemáticas que biografamos acima e as de hoje, matemáticas profissionais, estão duas mulheres extraordinárias que viveram entre o final do século passado e o começo deste, verdadeiramente respeitadas como as "primeiras" matemáticas: *Sofia Kovalevsky* e *Emmy Noether*. Suas biografias são admiráveis. E sobre isso, esperamos falar numa próxima vez.

Amalie Emmy Noether

Emmy Noether foi a filha mais velha de uma família judia de quatro filhos. Nasceu em Erlangen, Alemanha, a 23 de março de 1882. Seu pai foi o eminente matemático *Max Noether*.

Após concluir seus estudos básicos, ela optou por estudar Matemática. Já sabemos que, naquela época, essa não era uma decisão fácil. Como em outras universidades do mundo, a Universidade de Erlangen não admitia mulheres como estudantes. Noether conseguiu obter autorização para assistir aos cursos oferecidos pela Universidade apenas como ouvinte. Após dois anos, ainda na mesma situação, ela seguiu para a Universidade de Göttingen, onde teve a oportunidade de estudar com os célebres matemáticos *David Hilbert*, *Felix Klein* e *Hermann Minkowski*.

Finalmente, em 1904, após um semestre em Göttingen, a Universidade de Erlangen mudou sua política universitária, aceitando que as mulheres tivessem os mesmos direitos acadêmicos que os homens. Noether retornou imediatamente a sua cidade natal e, em 1907, concluiu seu doutorado.

Entretanto, ainda não se admitiam mulheres como professoras nas universidades. Noether, por algum tempo, e sem nenhum vínculo oficial, substituiu seu pai, que estava com problemas de saúde, no Instituto de Matemática de Erlangen.

Em 1909 foi admitida na Sociedade Matemática Alemã e, em 1915, já com sua reputação científica consolidada, foi convidada por Hilbert e Klein para retornar a Göttingen e trabalhar com eles, e lá permaneceu até 1933. No entanto, apenas em 1919 Noether pôde ser admitida legalmente como professora, e somente em 1922 começou a receber um salário. Antes disso, Hilbert, que tanto se esforçou pela admissão de Noether como docente, divulgava como sendo seus os cursos que ela lecionava!

Os nazistas, em 1933, destituíram Noether do seu cargo. Foram em vão os esforços de vários matemáticos para mudar essa situação. Além de mulher e judia, ela era membro do Partido Social Democrata. Felizmente, nesse mesmo ano, ela recebeu convites para ir para Oxford, para o Somerville College e para o Bryn Mawr College nos Estados Unidos. Noether optou pelo último estabelecimento, talvez por sua reputação de ter abrigado eminentes mulheres matemáticas. Pouco tempo depois, começou a dar aulas também em Princeton. Sua estada nos Estados Unidos durou pouco. Morreu em 14 de abril de 1935, após uma complicada operação de um cisto no ovário.

A obra matemática de Emmy Noether é original e profunda. Trabalhou especialmente em Álgebra Abstrata, na teoria dos ideais e das álgebras não-comutativas. Os módulos noetherianos foram assim chamados, em sua homenagem. Ela deu as formulações matemáticas de vários conceitos da Teoria Geral da Relatividade de Einstein. O próprio Einstein, em 1918, numa carta a Hilbert, expressou sua admiração ao penetrante pensamento matemático de Noether.

Foi a única mulher a proferir uma palestra plenária no Congresso Internacional de Zurique, em 1932. Juntamente com o matemático *Emil Artin* ganhou o *Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize* por seus trabalhos em Matemática.

Após sua morte, matemáticos importantes não pouparam palavras para elogiá-la. Segundo o matemático francês *Jean Dieudonné*, ela foi "[...] de longe, a melhor mulher matemática de todos os tempos e, dentre homens ou mulheres, a maior matemática do século XX".

Um enigma proposto por Ada Lovelace

Ada LOVELACE era o nome de casada de Ada BYRON, filha do famoso poeta inglês Lord BYRON.

Essa mulher do século XIX (toda a sua vida decorreu durante esse século) foi uma das mulheres mais sobressalientes da História da Matemática, famosa sobretudo pelos seus trabalhos com Charles BABBAGE na invenção da sua máquina de calcular.

Certo dia, ao lhe perguntarem a idade, ela respondeu: "Se trocarmos a ordem dos seus dois algarismos e elevarmos ao quadrado, obtem-se justamente o ano em que estamos".

Em que ano teve lugar esta conversa? Em que ano nasceu Ada BYRON?

Arquimedes e a coroa do rei

Severino de Souza

Introdução

O Professor Geraldo Ávila teve a gentileza de mostrar-me seu último artigo sobre a "regra de três", antes mesmo que ele fosse publicado, como se faz agora, no presente livro. Li-o com bastante interesse e deparei-me, já no final do artigo, com a sugestão do Prof. Ávila de que os leitores da Revista tentassem apresentar problemas interessantes sobre proporcionalidade. Pois é exatamente isto o que pretendemos fazer aqui, apresentando a solução daquele interessantíssimo problema da coroa, o qual Arquimedes resolveu para o rei de Siracusa. Mas, antes vamos contar um pouco da história da vida de Arquimedes e do tempo em que viveu este grande sábio.

Arquimedes e seu tempo

Arquimedes nasceu e viveu em Siracusa, uma cidade da Sicília que existe até os dias de hoje (veja o mapa da Figura 1). Consta que ele morreu no ano 212 a.C. com a idade de 75 anos, e daí se conclui que nasceu no ano 287 a.C. Foi o maior matemático da Antiguidade. Na verdade, como Arquimedes, Newton e Gauss são considerados os três maiores matemáticos de todos os tempos, é claro então que Arquimedes ostenta o título de maior matemático da História, pelo menos até o nascimento de Newton em 1642.

Siracusa era uma cidade-estado das muitas que os gregos fundaram, portanto Arquimedes era um matemático grego. Mas nessa época a Grécia já havia sido conquistada por Alexandre da Macedônia, que expandira seu Império pela Ásia e Egito. Alexandre resolvera instalar a capital do Império numa cidade a ser construída no extremo oeste do delta do rio Nilo. Isto foi feito, não por Alexandre, que morreu em 323 a.C., mas por um de seus generais, Ptolomeu Soter, que ficou com a parte egípcia do Império e iniciou uma dinastia grega no Egito. Assim surgiu Alexandria (veja o mapa da Figura 1), que se tornou um centro famoso da cultura chamada "helenística" e que contava até com uma verdadeira universidade – um instituto de altos estudos e uma biblioteca muito famosa, que chegou a ter 750 000 volumes.

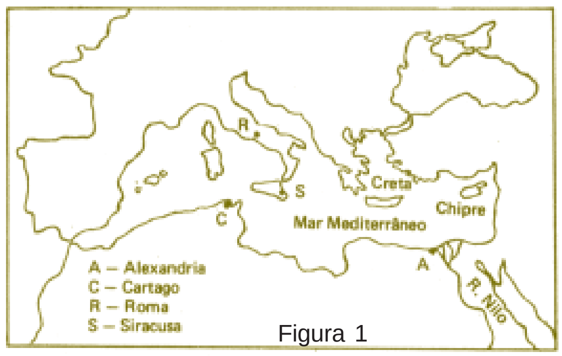


Figura 1

Em Alexandria, a Matemática ocupava um lugar de destaque, e nomes como Euclides (o da Geometria), Apolônio, Arquimedes, Eratóstenes, Aristarco e Ptolomeu (o astrônomo, sem nenhum parentesco com os reis Ptolomeus) pertenceram à Escola de Alexandria. É verdade que Arquimedes viveu em Siracusa, mas estudou em Alexandria e mantinha correspondência com vários sábios de lá, como Eratóstenes. Esse último era bibliotecário, um homem de saber universal, bem conhecido pelo chamado "crivo de Eratóstenes", porém seu feito mais notável foi calcular o raio e a circunferência da Terra.

Na época em que viveu Arquimedes, Roma já estava em expansão, com muitas guerras de conquistas, dentre as quais são bem conhecidas as chamadas "guerras púnicas", contra Cartago. Esta cidade ficava onde é hoje um subúrbio de Tunis, a capital da Tunísia (veja Figura 1). Naquele tempo, Cartago controlava uma extensa região que se estendia até a Espanha, constituindo-se numa incômoda rival de Roma. Na segunda das guerras púnicas, Siracusa se aliara a Cartago, daí ter sofrido uma investida fatal de Roma. Siracusa resistiu bravamente aos ataques do general Marcelo, graças, sobretudo, às máquinas de guerra idealizadas por Arquimedes; mas depois de um longo cerco acabou por sucumbir à superioridade das tropas romanas. Há várias versões sobre a morte de Arquimedes; segundo uma delas, durante o saque da cidade, em 212 a.C., ele foi morto por um soldado romano enquanto, absorto, se ocupava com problemas matemáticos.

Arquimedes era bem relacionado com o rei Heron de Siracusa e talvez até fosse seu parente. Conta-se que Heron mandou fazer uma coroa de ouro, mas teve razões para desconfiar de que o ouro da coroa houvesse sido misturado com muita prata. Ele comunicou o fato a Arquimedes, para que o sábio encontrasse um meio de dirimir suas dúvidas. Diz a história que

Arquimedes descobriu como resolver o problema enquanto tomava um banho e refletia sobre o fato de que os corpos imersos na água – como seu próprio corpo - se tornam mais leves, exatamente *pelo peso da água que deslocam.* Este fato lhe teria permitido idealizar um modo de resolver o problema da coroa, e tão excitado teria ficado com a descoberta, que saiu nu pelas ruas de Siracusa, gritando “eureka! eureka!”, que significa “descobri! descobri!”

O Princípio de Arquimedes

A descoberta de Arquimedes, uma vez compreendida, é surpreendentemente simples. Aliás, isto de ser simples é um traço muito freqüente nas idéias geniais e fecundas.

Para explicar o chamado *Princípio de Arquimedes*, vamos imaginar duas experiências. Na primeira delas seguramos um pedaço de ferro de peso P**,** totalmente submerso num vaso d’água. Verificamos que o ferro fica mais leve do que fora d’água, mas, se abandonado a si mesmo, vai ao fundo do vaso. Ele fica mais leve porque perde, em peso, uma quantidade igual ao peso p do volume de água que deslocou (Figura 2). Acontece que $P > p$; logo, dentro d’água, a força resultante sobre o ferro é $P – p$, dirigida para baixo.

Na segunda experiência seguramos um pedaço de cortiça de peso $P’$, também totalmente submerso na água. Verificamos que ele não somente perde todo o seu peso, mas ainda é empurrado para cima. Isto porque, desta vez, o peso $P’$ da água deslocada pela cortiça é maior que o peso $P’$ da própria cortiça (Figura 3); então, dentro da água, a força resultante sobre a cortiça é $p’ – P’$ dirigida para cima. Portanto, quando abandonamos a cortiça, ela volta à tona e fica boiando. E, quando em repouso na superfície, ela fica apenas parcialmente submersa (Figura 4), o suficiente para deslocar um volume de água de peso igual ao peso total da cortiça.

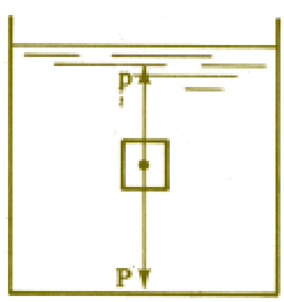


Figura 2

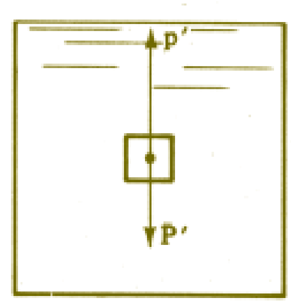


Figura 3

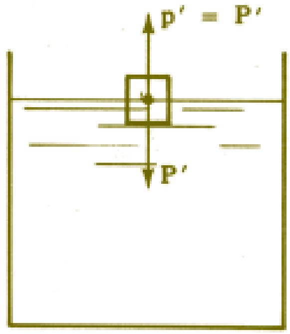


Figura 4

Vamos enunciar em destaque o famoso

Princípio de Arquimedes. *Quando um corpo é mergulhado na água ele perde, em peso, uma quantidade igual ao peso do volume de água por ele deslocada.*

A Coroa do rei

Veremos agora como resolver o problema da coroa, utilizando o princípio de Arquimedes e um pouco de proporções. Seja P o peso da coroa, que supomos ter sido feita com um peso x de ouro e um peso y de prata. Logo,

$$P = x + y. \qquad (1)$$

Suponhamos que uma porção de ouro de peso x tenha peso x' quando pesada dentro d'água, e seja X' o peso, dentro d'água, de uma porção de ouro de peso igual ao peso P da coroa. Ora, o peso do ouro dentro d'água é proporcional ao seu peso fora d'água (porque o volume é proporcional ao peso, devido à homogeneidade do material). Logo,

$$\frac{x'}{x} = \frac{X'}{P} \quad \therefore \quad x' = \frac{xX'}{P}. \qquad (2)$$

De modo análogo, o peso da prata, quando pesada dentro d'água, é proporcional ao seu peso fora d'água. Se y' designa o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso y, e Y' o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso igual ao peso P da coroa, então teremos, exatamente como no raciocínio que nos levou à equação (2) acima,

$$y' = \frac{yY'}{P} \qquad (3)$$

Seja *P'* o peso da coroa quando pesada dentro d'água. É claro que *P'* = *x'* + *y'*, de sorte que, somando (2) e (3) acima, obtemos

$$P' = x' + y' = \frac{xX' + yY}{'P} \quad \therefore \quad PP' = xX' + yY'.$$

Daqui e de (1) segue-se que

$$(x + y)p' = xX' + yY'$$

$$\hat{}\ x(X' - P') = y(P' - Y'),$$

ou ainda,

$$\frac{x}{y} = \frac{P' - Y'}{X' - P'} \qquad (4)$$

Não temos dados específicos sobre a coroa verdadeira que o rei Heron entregou a Arquimedes para ser investigada, mas podemos muito bem imaginar uma situação concreta. Digamos que a coroa pesasse *P* = 894 g fora d'água e 834 g dentro d'água. Suponhamos também, seguindo a notação já introduzida, que *X'* = 847,7 g e *Y'* = 809 g. Substituindo estes valores em (4) encontramos

$$\frac{x}{y} = \frac{834 - 809}{847{,}7 - 834} = \frac{25}{13{,}7} \cong 1{,}82.$$

Daqui e de (1) obtemos o seguinte sistema de equações para determinar *x* e *y*:

$$x + y = 894, \;\; x = 1{,}82\, y.$$

Resolvendo este sistema encontramos $x \cong 577$ g e $y \cong 317$ g. Portanto, nossa coroa contém o peso imaginário 577 *g* de ouro e 317 *g* de prata.

Tendo em conta que o peso específico do ouro é 19,3 g/cm^3 e o da prata é 10,5 g/cm^3, podemos prosseguir e calcular as quantidades *volumétricas* de ouro e prata usados na coroa. Trata-se, novamente, de um cálculo simples usando proporções. Sejam V_0 e V_p, respectivamente, os volumes de ouro e prata empregados para fazer a coroa. Então,

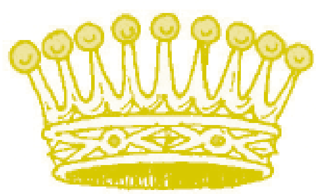
$$\frac{x}{V_0} = \frac{19{,}3}{1} \quad \text{e} \quad \frac{y}{V_P} = \frac{10{,}5}{1}.$$

Substituindo x = 577 e y = 317 e resolvendo as equações resultantes, encontramos

$$V_0 = \frac{577}{19{,}3} \cong 29{,}9\ \text{cm}^3 \quad \text{e}$$

$$V_P = \frac{317}{10{,}5} \cong 30{,}2\ \text{cm}^3.$$

Vemos que o ourives usou praticamente as mesmas quantidades volumétricas de ouro e prata, aproximadamente 30 cm^3 de ouro e 30 cm^3 de prata. É muita prata para pouco ouro numa coroa real! Oxalá isto não tenha custado a cabeça do ourives...



Numerais

Escreve-nos o colega: “Ao dar uma aula sobre numerais em uma 5ª série do 1º grau, observei que os aspectos históricos da Matemática despertam no adolescente grande interesse. Elaborei então um estudo sobre a história dos numerais para os meus alunos.”

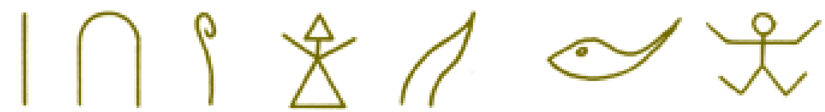
Transcrevemos abaixo alguns trechos deste estudo.

Numerais egípcios

Os numerais egípcios foram encontrados no interior e exterior das pirâmides do Egito. Eles fazem parte dos famosos hieroglifos que datam de 3300 anos antes de Cristo.

Os numerais egípcios são:

1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000



Os egípcios escreviam os números na horizontal. Veja como eles escreviam 12 302:

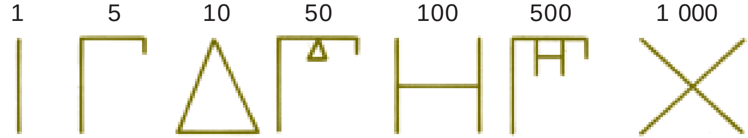
10 000 + 1 000 + 1 000 + 100 + 100 + 100 + 1 + 1 = 12 302

Numerais gregos

Em datas anteriores a 300 a.C. surgiram os numerais gregos. Os gregos, como os egípcios, escreviam seus numerais na posição horizontal.

Os numerais gregos são:

1 5 10 50 100 500 1 000



Observe que o numeral do número 50 é formado pelos numerais de 5 e 10. Veja como fica o número 2 877:

O trabalho continua com uma descrição dos numerais babilônicos e o seu uso na representação dos números. Descreve, a seguir, os numerais maias e, na parte final, menciona os numerais romanos e indu-arábicos usados até hoje.

Diz o professor Mozart que o trabalho teve como fonte de pesquisa o livro School Mathematics II, de Robert E. Eicholz e outros; Addison Wesley, 1971.

(Enviado por Mozart Cavazza Pinto Coelho.)

Euclides, Geometria e Fundamentos

Geraldo Ávila

Introdução

A preocupação com os fundamentos da Matemática remonta aos gregos da antigüidade. E a obra conhecida como *Os Elementos* de Euclides é a primeira apresentação da Matemática com pretensões – aliás, muito justificadas! – de ser rigorosamente fundamentada. Falemos um pouco sobre Euclides e os *Elementos*.

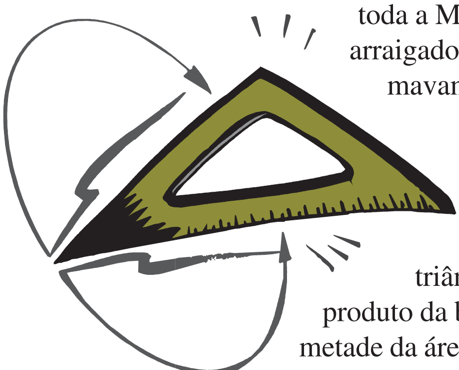
Os Elementos de Euclides

Temos muito pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a.C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410-485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a época em que viveu Euclides.

Euclides escreveu várias obras científicas. A mais famosa das quais, conhecida com o nome de *Elementos*, reúne quase todo o conhecimento matemático daquele tempo. Em parte por causa disso, e também por tratar-se de uma obra de escola, que reunia a maior parte da Matemática então conhecida, as obras anteriores aos *Elementos* desapareceram. A única exceção são alguns fragmentos atribuídos a *Hipócrates de Quio*, que viveu no século V a.C. Assim, *Os Elementos* de Euclides é praticamente tudo o que temos da Matemática grega, que se desenvolveu desde seu início com *Tales de Miletos*, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides – um período de cerca de 250 anos. Aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evo luísse do estágio embrionário em que se encontrava com Tales até o alto grau de sofisticação que transparece em *Os Elementos*.

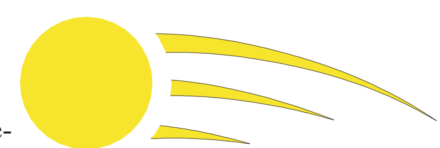
Não sabemos se Euclides escreveu *Os Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; a obra foi foi muito usada no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de *Legendre*, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive no português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX.

Um equívoco que se comete com freqüência é pensar que *Os Elementos é* uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de Aritmética e Álgebra em vários dos livros de *Os Elementos*. O que é verdade - e isso explica, pelo menos em parte, a origem do equívoco - é que a Matemática grega, na época em que Euclides compôs sua obra, era toda ela geometrizada. De fato, a crise dos incomensuráveis e a genial solução que lhe deu Eudoxo, aliada a uma excessiva preocupação com o rigor, encaminhou toda a Matemática para o lado da Geometria. Isso se tornou tão arraigado que até cerca de 100 anos atrás os matemáticos costumavam ser chamados de “geômetras”.



Um outro equívoco não menos freqüente é pensar que os fatos geométricos de *Os Elementos* sejam expressos numericamente como o são para nós hoje. Para exemplificar, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula, exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante. Para nós, hoje, a área de um círculo é πr^2, mas para *Arquimedes* (287-212 a.C.), que viveu algumas décadas depois de Euclides, a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio do círculo. Para nós o volume da esfera é $4\pi r^3/3$, enquanto o que Arquimedes nos diz é que o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3; e isso é informação suficiente.

Na Matemática grega, antes e durante o período helenístico, não havia fórmulas como as que conhecemos hoje; tudo era dado em termos de proporções, como no caso do volume da esfe-



ra que acabamos de mencionar. E isso perdurou no ocidente por mais um milênio após o declínio da civilização helenística.

O conteúdo de *Os* Elementos

Os Elementos são hoje uma obra antes de tudo de valor histórico. Sua melhor versão é a tradução inglesa de *Thomas L. Heath* (que foi publicada pela Editora Dover em três volumes).

Isso porque Heath enriqueceu sobremaneira a obra de Euclides com uma excelente introdução, além de inúmeros, valiosos e esclarecedores comentários.

Folha de rosto da primeira versão inglesa de *Os Elementos*.

O volume I de Heath reúne os Livros I e II de *Os Elementos*, o primeiro destes contendo uma boa parte da geometria plana, construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos e o teorema de Pitágoras (que é a Proposição 47). Ainda no volume I de Heath encontra-se o Livro II de *Os Elementos*, sobre o que se costuma chamar de "Álgebra geométrica". Por exemplo, a Proposição 4 desse Livro II é o equivalente, em linguagem geométrica, à propriedade que hoje conhecemos como "quadrado da soma" (igual ao quadrado do primeiro, mais o quadrado do segundo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo). Euclides enuncia isso geometricamente assim: "se um segmento de reta é dividido em dois, o quadrado construído sobre o segmento inteiro é igual aos quadrados construídos sobre os segmentos parciais e duas vezes o retângulo construído com estes segmentos". Euclides não fala, mas ele está se referindo a áreas, quando diz "... é igual...".

O volume II de Heath contém os Livros III a IX de *Os Elementos*, tratando do círculo (Livro III), construção de certos polígonos regulares (Livro IV), teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), semelhança de figuras (Livro VI) e teoria dos números (Livros VII-IX). Por exemplo, a Proposição 20 do Livro IX é o famoso teorema: "existem infinitos números primos". Mas Euclides não fala "infinitos", já que os gregos não admitiam o que Aristóteles chama de "infinito atual", apenas o chamado "infinito potencial". Em linguagem de hoje, Euclides diria mais ou menos isso: "Dado qualquer conjunto (finito, entenda-se bem!) de números primos, existe algum número primo fora desse conjunto". E a demonstração, novamente, é geométrica. Na opinião do matemático inglês *Godfrey Harold*

Hardy (1877-1947), trata-se de uma das mais belas demonstrações da Matemática. Finalmente, o volume III de Heath contém os Livros X-XIII, onde são tratados a incomensurabilidade, geometria espacial e os poliedros regulares.

A Geometria dedutiva

Foi no início do século VI a.C. que *Tales de Mileto* inaugurou na Matemática a preocupação demonstrativa. A partir de então a Matemática grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, essas a partir de outras precedentes, e assim por diante, um processo que não teria fim. Mas os gregos logo perceberam isso e viram que era necessário parar o processo em certas proposições iniciais, consideradas evidentes por si mesmas; com base nessas, todas as outras são demonstradas. As proposições evidentes por si mesmas são hoje designadas, indiferentemente, "postulados" ou "axiomas". O aspecto mais importante de *Os Elementos* é essa organização dos fatos, num admirável encadeamento lógico-dedutivo, em que um número reduzido de proposições e definições iniciais são o bastante para se demonstrar, uns após os outros, todos os teoremas considerados. Historicamente, *Os Elementos* de Euclides é a primeira corporificação desse "método axiomático", do qual voltaremos a falar mais adiante.

As geometrias não-euclidianas

Embora muito admirado e aplaudido, o modelo axiomático de *Os Elementos*, no que se refere ao quinto postulado, ou postulado das paralelas[1], suscitou questionamentos.

Já na antigüidade vários matemáticos acreditavam que ele pudesse ser demonstrado com base nos outros postulados e tentaram fazer tal demonstração. Essas tentativas foram retomadas nos tempos modernos pelo matemático italiano *Girolamo Saccheri* (1667-1733), que publicou, pouco antes de morrer, um opúsculo no qual pretendia ter demonstrado o postulado pelo método de redução ao absurdo. Assim, negando o postulado, ele demonstrou uma série de teoremas, concluindo ter chegado a uma contradição. Mas, no fundo, no fundo, não havia contradição nas conclusões de Saccheri, embora isso só fosse notado muito mais tarde, quando *Eugênio Beltrami* (1835-1900) descobriu o trabalho de Saccheri.

Por volta de 1830 já havia sérias suspeitas de que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Suspeitava-se que ele fosse independente dos outros quatro, e que se pudesse desenvolver uma geometria a partir de negações do postulado das paralelas, ao lado dos outros postulados

1 Uma de suas versões é: num plano, por um ponto fora de uma reta existe uma e somente uma paralela à reta dada.

de Euclides. Foi nessa época que o matemático húngaro *János Bolyai* (1802-1860) e o russo *Nicokolai Ivanovich Lobachevsky* (1792-1856) publicaram, independentemente um do outro, a descoberta de geometrias não-euclidianas, ou seja, geometrias que negam o postulado das paralelas [2].

Mas as publicações de Bolyai e Lobachevski não foram suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade das geometrias não-euclidianas. Esses trabalhos eram parecidos com o de Saccheri: negavam o postulado das paralelas e desenvolviam uma série de teoremas sem chegar a contradição alguma. Mas, e daí? Quem garante que a contradição não está para aparecer logo no próximo teorema que ainda não foi demonstrado? Quem garante que todos os teoremas já foram enunciados e demonstrados? Aliás, foi somente após essas questões terem sido levantadas, aliado à em conexão com as tentativas de construir geometrias não-euclidianas, que os matemáticos começaram a perceber que a própria Geometria de Euclides também estava sujeita aos mesmos questionamentos.

Quem poderia garantir que os cinco postulados de Euclides não poderiam levar a uma contradição? Afinal, Euclides demonstrara apenas um número finito de teoremas. Quem sabe a contradição apareceria no próximo teorema, como alguém que, depois de tanto percorrer as areias de um deserto à procura de um oásis, quando não mais acredita que ele exista, pode - agora por felicidade e não desdita - encontrá-lo do outro lado da próxima duna!...]

Foi Beltrami quem primeiro exibiu um modelo de geometria não-euclidiana, que permitia interpretar os fatos dessa geometria, em termos da própria geometria euclidiana.

Outros modelos foram construídos por *Felix Klein* (1849-1925) e *Henri Poincaré* (1854-1912). Esses modelos, como o de Beltrami, foram apoiados na geometria euclidiana.

O método axiomático

Foi a partir de então - após esses vários matemáticos haverem exibido modelos euclidianos das geometrias não-euclidianas – que essas geometrias ganharam total credibilidade[3]. Provava-se que elas eram consistentes, isto é,

2 Quando jovem, o pai de *Bolyai* havia sido colega de *Gauss*, em Göttingen. E quando o filho escreveu suas idéias, ele (o pai) enviou um exemplar do manuscrito a *Gauss*. Mas este, pouco sensível ao entusiasmo do jovem *János*, escreveu de volta, dizendo mais ou menos o seguinte: "sim, mas isso que seu filho fez não é novidade para mim, que percebi essa possibilidade há muitos anos, em minha juventude". Realmente, tudo indica que Gauss tenha sido o primeiro matemático a ver a possibilidade das geometrias não-euclidianas.

3 Estamos deixando de lado uma vertente importantíssima no desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, devida a *Riemann*, mas que não é necessária no momento.

livres de contradições internas. Mas tais provas apoiavam-se na geometria euclidiana, de sorte que elas tornavam ao mesmo tempo evidente a necessidade de provar a consistência da própria Geometria de Euclides. Os matemáticos começaram então a estudar a consistência dos postulados de Euclides, e logo perceberam que eles eram insuficientes para provar os teoremas conhecidos, sem falar nos demais que viessem a ser considerados no futuro. Analisando os *Elementos* desse novo ponto de vista, eles descobriram que a axiomática euclidiana era muito incompleta e continha sérias falhas. Euclide*s*, em suas demonstrações, apelava para fatos alheios aos postulados. Era necessário reorganizar a própria geometria euclidiana, acrescentando, inclusive, os postulados que estavam faltando. Isso foi feito por vários matemáticos no final do século XIX, dentre eles *David Hilbert* (1862-1943), que, em 1889, publicou o livro *Fundamentos da Geometria*, no qual ele faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana.

Os Fundamentos da Matemática

Paralelamente ao que acontecia em Geometria, as preocupações com o rigor se faziam presentes também na Análise Matemática, a partir de aproximadamente 1815. Os desenvolvimentos que vinham ocorrendo na Geometria, na Álgebra e na Análise durante todo o século XIX convergiram, no final do século, para uma preocupação com os fundamentos de toda a Matemática. Por duas razões importantes, os matemáticos acabaram se convencendo de que todas as teorias matemáticas teriam de se fundamentar, em última instância, nos números naturais.

De um lado, os números complexos, os números reais, os racionais e os inteiros puderam ser construídos, de maneira lógica e consistente, uns após outros, começando nos números naturais. De outro lado, Hilbert estabelecera uma correspondência entre os elementos geométricos do plano - pontos, retas e círculos - com os entes numéricos da geometria analítica. Os pontos podem ser caracterizados por pares ordenados de números reais, e as retas e círculos por suas equações. Isso permitiu reduzir o problema da consistência da Geometria à consistência da Aritmética. Provando-se a consistência desta, ficaria também provada a da Geometria. Assim, a Geometria, que desde a antigüidade era considerada o modelo de rigor lógico, estava agora dependendo da própria Aritmética para sua efetiva fundamentação.

Leopold Kronecker (1823-1891) dizia que Deus nos deu os números naturais e que o resto é obra do homem. Com isso ele queria dizer que esses núme-

4 O matemático italiano *Giuseppe Peano* (1858-1932) mostrou como construir esses números a partir de noções primitivas e postulados.

ros deveriam ser tomados como o ponto de partida, o fundamento último de toda a Matemática. Não obstante, *Richard Dedekind* (1831-1916) mostrou ser possível construir os números naturais a partir da noção de conjunto, noção essa que seria mais extensamente desenvolvida por *Georg Cantor* (1845-1918)[4].

A possibilidade de construir toda a Matemática a partir da teoria dos conjuntos intensificou o interesse por esse campo de estudos. Porém, esses estudos estavam ainda incipientes e os matemáticos já começavam a encontrar sérias contradições internas na teoria. Muitas dessas contradições foram resolvidas, até que, em 1931, o lógico austríaco *Kurt Gödel* (1906-1978) surpreendeu o mundo matemático com a publicação de um trabalho em que demonstrava que o método axiomático tem inevitáveis limitações, que impedem mesmo a possibilidade de construir um sistema axiomático, abrangendo a Aritmética.

Para bem entender o que isso significa, devemos lembrar que um sistema axiomático deve satisfazer as três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de os postulados serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo.

Pois bem, Gödel prova, dentre outras coisas, que a consistência de qualquer sistema matemático que englobe a Aritmética não pode ser estabelecido pelos princípios lógicos usuais. Isso ele prova como conseqüência deste seu outro resultado, conhecido como o teorema da incompletude: se uma teoria formal que abrange a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta, o que significa dizer que haverá alguma proposição sobre os inteiros que a teoria será incapaz de decidir se verdadeira ou falsa.

Seria errôneo pensar que os estudos de *Fundamentos* terminam com os resultados de Gödel, ou que esses resultados, pelos seus aspectos negativos, condenam a Matemática a uma posição inferior no contexto do conhecimento humano. O resultado de Gödel certamente mostra que é falsa a expectativa acalentada desde a antigüidade de que o conhecimento matemático, com seu caráter de certeza absoluta, possa ser circunscrito nos limites permitidos por um sistema axiomático. Além de revelar as limitações do método axiomático, os resultados de *Gödel* mostram, isto sim, que as verdades matemáticas, na sua totalidade, escapam aos figurinos formais dos sistemas axiomáticos.

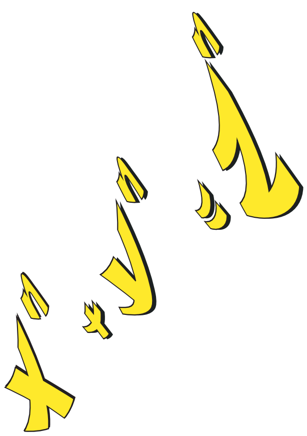
Hermann Weyl (1885-1955), que está entre os maiores matemáticos do século XX, disse, espirituosamente: *Deus existe porque certamente a Matemática é consistente; e o demônio existe porque somos incapazes de provar essa consistência.*

Finalmente Fermat descansa em paz

Flávio Wagner Rodrigues

Em 1995, a comunidade matemática aceitou a prova dada por *Andrew Wiles* para a famosa conjetura de Fermat, formulada em 1630. Wiles apresentou o seu trabalho pela primeira vez em 1993, mas havia um problema numa das etapas da demonstração que ele finalmente conseguiu resolver em colaboração com *Richard Taylor*.

Como os leitores bem sabem, a conjetura afirmava que para o natural $n > 2$ não existem inteiros positivos $x, y, z,$ tais que $x^n + y^n = z^n$. Fermat escreveu essa afirmação na margem de um livro, dizendo que a solução que ele encontrara era longa e não cabia no papel que ele dispunha.



Resolvido o problema, e frustrados assim os sonhos dos milhares de amadores e profissionais que sonhavam com a glória de resolvê-lo, restam duas indagações que são, no mínimo, curiosas.

A primeira é como uma conjetura, cujo enunciado é simples e acessível até para estudantes do ensino médio, levou tanto tempo e exigiu teorias extremamente sofisticadas para ser finalmente decidida. Como não sabemos a resposta, resta-nos o consolo de que talvez em fatos como esse residam a beleza e o encanto da Matemática.

A outra dúvida é saber se Fermat tinha realmente uma demonstração. Com altíssima probabilidade a resposta é "não". Afinal, a demonstração de Wiles utiliza teorias que Fermat certamente não conhecia e ocupou mais de 200 páginas que nenhuma margem de livro, por maior que fosse, seria capaz de conter. O mais provável é que Fermat tenha cometido um erro semelhante aos que cometeram milhares de pessoas que tentaram depois dele. Mas, ainda que apenas por curiosidade histórica (para saber no que foi que ele errou), não podemos deixar de concordar com Fernando Quadros que foi realmente uma pena que Fermat não dispusesse de uma margem mais larga.

A regra da falsa posição

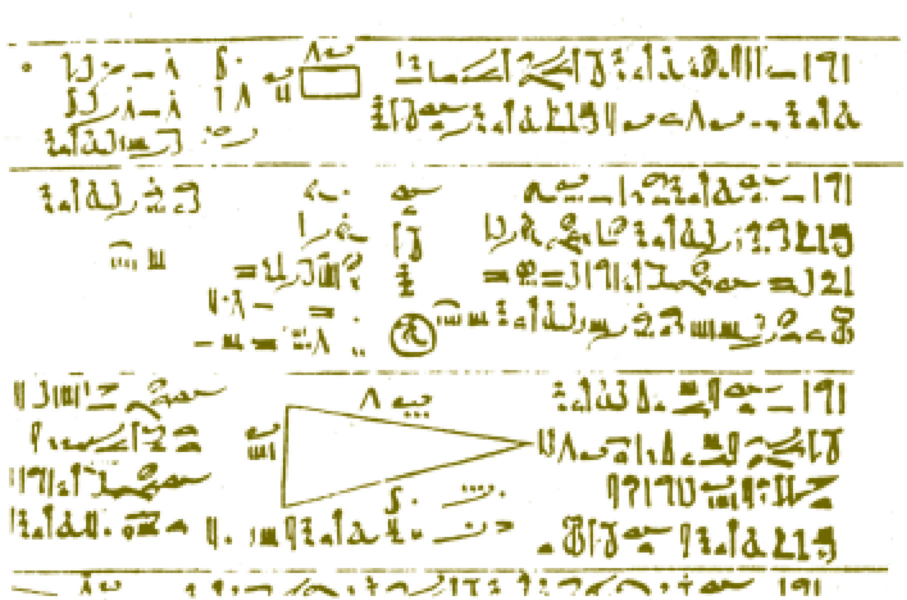
Oscar Guelli

Há aproximadamente 3 600 anos o faraó do Egito tinha um súdito cujo nome chegou até os nossos dias: *Aahmesu.*

Aahmesu, que significa “filho da lua”, era uma pessoa muito simples, provavelmente um escriba.

Atualmente ele é conhecido como *Ahmes,* autor do *Papiro Ahmes,* mais famoso como *Papiro de Rhind*.

O Papiro de Rhind é um antigo manual de Matemática, contendo oitenta *problemas de Álgebra*, cada um deles com a sua solução.



O problema a seguir está no *Papiro de Rhind*. Mudamos um pouco os números, apenas para tornar mais clara a explicação. Naturalmente, isto não altera em nada a idéia central.

"Um montão, seus dois terços, sua metade, todos ao juntar-se fazem treze. Qual é a quantidade?"

O problema se reduz à equação:

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x=13 \Rightarrow 6\cdot\left(x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x\right)=6\cdot 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x+4x+3x=78 \Rightarrow 13x=78 \Rightarrow x=\frac{78}{13} \Rightarrow x=6.$$

Mas os antigos matemáticos egípcios não podiam resolvê-lo desta forma.

As suas equações vinham expressas totalmente em palavras. A Álgebra puramente simbólica estava muito distante de ser inventada. Encontravam a solução deste tipo de equação através de um método chamado *regra da falsa posição:*

– atribuíam um valor falso a *montão,* por exemplo, 12:

$$12+\frac{2}{3}(12)+\frac{1}{2}(12)=12+8+6=26$$

– uma regra de três simples indicava o valor verdadeiro de *montão:*

O valor falso 12 está para 26 assim como o valor verdadeiro = *montão* está para 13.

Portanto:

valor verdadeiro

$$\frac{12\times 13}{26}=6 \Rightarrow \text{montão}=6$$ [1]

1 Professores mais antigos, quando estudantes, lembram-se de encontrar este método em seus livros-texto (*Arithmetica Progressiva,* de António Trajano, por exemplo). Por que o ensino desse processo caiu no esquecimento, justamente agora que os processos de aproximação ganham tanta importância? Sim, pois este é um exemplo do uso das aproximações, em que se parte de um valor falso e se procura corrigi-lo para melhorar o resultado, o que, neste caso, tem pleno êxito: chega-se à solução exata.

O moderno sistema de numeração decimal levaria ainda muito tempo para ser criado. Por isso os matemáticos da antiguidade efetuavam todos os seus cálculos em instrumentos auxiliares chamados tabuleiros de cálculos.

Mas por que uma regra de três simples dá o valor verdadeiro de x? Uma simples coincidência ou existe uma razão clara e precisa por trás dela? Observe com atenção: podemos interpretar o enunciado "resolver a equação

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x=13\text{"}$$

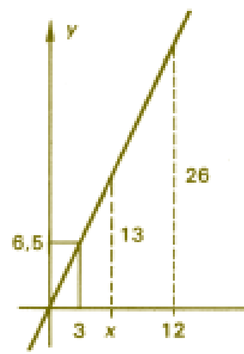
através da idéia moderna de função:

"Se f é uma função cujos valores são dados pela fórmula

$$f(x)=x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x\quad ,$$

para que valor de x temos $f(x) = 13$?"

Traçamos em primeiro lugar o gráfico de f:



x	$f(x)$
0	0
3	6,5

Substituímos o "valor falso" 12:

$$f(x)=x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x$$

$$f(12)=12+\frac{2}{3}(12)+\frac{1}{2}(12)$$

$$f(12)=26;\quad (12, 26)$$

Se representamos o "valor verdadeiro" por x, por semelhança de triângulos podemos escrever:

$$\frac{12}{26} = \frac{x}{13}$$

ou seja:

12 está para 26 assim como
x está para 13

Os antigos matemáticos egípcios e de outros povos também eram capazes de resolver sistemas de equações através deste método.

Você seria capaz de encontrar a solução do seguinte problema-desafio da antiguidade, usando a regra da falsa posição?

"Doze anéis de prata pesam tanto quanto oito anéis de ouro. Se trocarmos um anel de prata por um anel de ouro, a diferença será de 6 tzin. Digam-me, quanto pesa um anel de prata e um anel de ouro?"

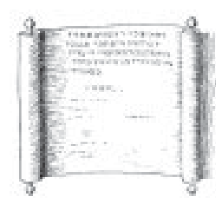
NR: O Comitê Editorial da **RPM** oferece alguns complementos:

Sobre o *Papiro de Rhind* (*Ahmes*)

O *Papiro de Rhind* foi encontrado nos meados do século passado, presumivelmente nas proximidades do templo de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, no Egito. Em 1858 foi comprado, no local, pelo antiquário escocês A. H. Rhind.

O papiro é um rolo com cerca de 30 *cm* de altura e 5 *m* de comprimento e encontra-se hoje, salvo alguns fragmentos, no Museu Britânico.

Os egípcios tinham um processo estranho para representar frações: as de numerador 1, como l/n, eram representadas por n ou h, mas todas as outras frações (salvo 2/3 e, algumas vezes, $n/n + 1$) eram escritas como soma de frações com numerador 1. Assim, por exemplo,



$$\frac{3}{5} \text{ era } \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}; \quad \frac{2}{7} \text{ era } \frac{1}{4}+\frac{1}{28}.$$

O problema "achar um número que somado com sua sétima parte dá 19"

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

é resolvido no papiro, em três passagens:

1) Elimina-se a fração, colocando-se 7 no lugar de x (7 é o valor falso).

$$7+\frac{1}{7}\cdot 7=8$$

2) Acha-se o número que multiplicado por 8 dá 19 (pela regra da falsa posição $\frac{x}{7}=\frac{19}{8}$).

$$8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+2+1+19.$$

3) Para se obter a solução, multiplica-se

$$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \text{ por } 7 \quad \left(x=7\cdot\frac{19}{8}\right)$$

$$x=7\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

Curioso é o fato de – embora os chineses tivessem, já antes de Cristo, regras eficientes para representar frações e operá-las os gregos terem adotado a representação egípcia, e esta ter permanecido em uso na Europa por mais de 1 000 anos.

Regra da "dupla falsa posição"

Usando a regra da falsa posição, pode-se resolver a equação $ax=b$. Se, porém, um problema exigir a solução da equação $ax+b=c$, a regra não funciona.

Supostamente, já antes de Cristo, os babilônios e os chineses usavam, neste caso, a regra da "dupla falsa posição", que ensina o seguinte:

Para achar x tal que $ax+b=c$, atribua a x dois valores "falsos" x_1 e x_2 e calcule ax_1+b e ax_2+b.

Se $d_1=ax_1+b-c$ e $d_2=ax_2+b-c$, a proporção

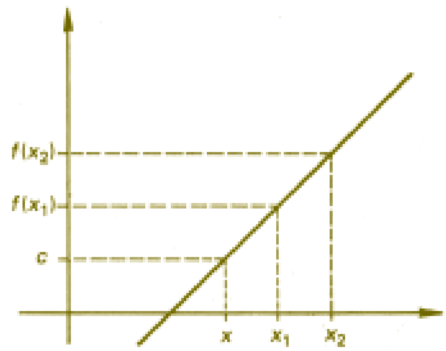
$$\frac{d_1}{x_1 - x} = \frac{d_2}{x_2 - x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

dá o número procurado.

A regra, em linguagem de hoje, é ilustrada na figura abaixo.

Se $f(x) = ax + b,$

$$\frac{f(x_1) - c}{x_1 - x} = \frac{f(x_2) - c}{x_2 - x}$$



Uma outra versão da mesma regra ensina o equivalente a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (*)$$

Tanto uma versão como a outra, quando aplicadas a equações do primeiro grau, dão o valor exato de *x.* Para problemas não lineares a regra poderá dar soluções aproximadas.

Um problema não linear, aparentemente resolvido pela regra da dupla falsa posição, foi encontrado já entre os escritos dos antigos babilônios. Lá perguntava-se em quantos anos duplica um capital de 1 *gur,* a juros de 20% ao ano. Em notação de hoje:

Após 3 anos o capital ficará multiplicado por $(1,2)^3$;

Após 4 anos o capital ficará multiplicado por $(1,2)^4$.

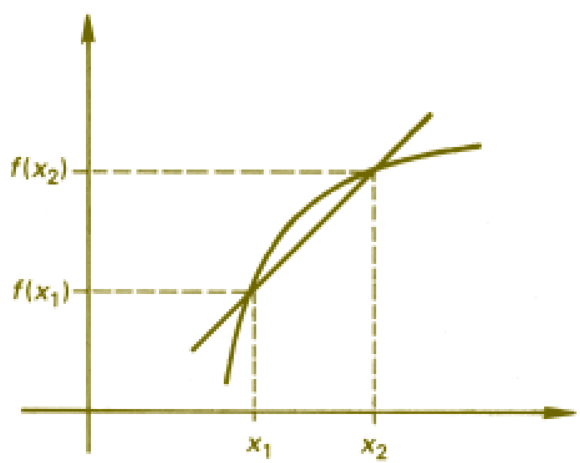
A resposta dada – "de 4 anos deve-se subtrair 2,5 meses" – é a mesma que obteríamos se usássemos a fórmula (*) para a equação

$$(1,\ 2)^x = 2, \quad x_1 = 3 \ \text{ e } \ x_2 = 4$$

Escritos árabes (séc. X) dizem explicitamente que a regra resolve problemas onde só aparecem adições, subtrações, multiplicações e divisões e que não se resolvem com ela problemas em que apareçam raízes quadradas ou cúbicas.

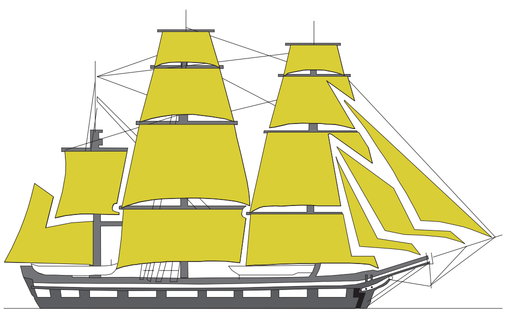
Já Cardano (séc. XVI) usa a regra da dupla falsa posição, repetidas vezes em um mesmo problema, a fim de obter melhores aproximações para a solução.

Hoje em dia, reconhecemos a regra da dupla falsa posição como um processo de aproximação, em que o arco de uma curva é substituído por um segmento de reta secante e exige, no caso não linear, cuidados especiais para que a solução obtida seja realmente uma "solução aproximada". É o que chamamos de processo da interpolação.



Medidas na carta de Caminha

Mozart Cavazza P. Coelho



Muitas passagens da carta de Pero Vaz de Caminha citam distâncias medidas em *léguas* ou em *braças*, unidades que hoje não se usam mais, a não ser em um sentido bastante impreciso. Vamos tentar entender o que representam essas medidas.

O sistema de pesos e medidas usado em Portugal à época do descobrimento e posteriormente no Brasil, no tempo colonial, apresentava sérios inconvenientes: não era uniforme de região para região, mudava segundo o tempo e as circunstâncias e, além disso, as subdivisões eram numerosas e irregulares, tornando os cálculos trabalhosos e imprecisos.

A tabela seguinte dá uma idéia da variedade de unidades de medida usadas antigamente para distâncias (as igualdades devem ser entendidas sempre como aproximações):

1 polegada →	2,54 cm	
1 pé →	12 polegadas →	30,48 cm
1 passo →	5 pés →	1,52 m
1 palmo →	8 polegadas →	20,32 cm
1 estádio →	125 passos →	190 m
1 toesa →	9 palmos →	1,83 m
1 vara →	5 palmos →	1,02 m
1 jarda →	4 palmos →	81 cm
1 côvado →	3 palmos →	61 cm
1 corda →	15 palmos →	3,05 m
1 braça brasileira →	2,2 m	
1 milha brasileira →	1000 braças →	2200 m
1 légua brasileira →	3000 braças →	6600 m

Qual era a *légua* mencionada na carta de Caminha? A *braça brasileira* é citada no dicionário Aurélio e equivale a 2,2 m, enquanto no sistema inglês a braça equivale a 1,8 m. Uma *légua* é definida no mesmo dicionário como sendo uma medida itinerária igual a 6 000 m. Entretanto, uma *légua de sesmaria* corresponde a 3 000 braças, o que significa 6 600 m. Essas são medidas comumente empregadas para medir distâncias terrestres. Provavelmente, a *légua* citada na carta de Caminha era a *légua marítima*, que ainda diferia da *légua terrestre*.

Considerando a necessidade de uma uniformização, o rei da França, Luís XVI, em maio de 1790, decretou a criação de uma comissão para estabelecer um sistema padronizado de pesos e medidas. A comissão, formada por membros da Academia de Ciências de Paris, decidiu tomar como referência para as medidas de distância o comprimento de um meridiano terrestre. Assim, foi definido o *metro* como sendo o comprimento do meridiano terrestre, dividido por 40 000 000. O comprimento do meridiano foi estabelecido a partir de medições feitas em arcos do meridiano de Paris, entre a torre de Dunquerque e a cidade de Barcelona, comparadas com medições feitas anteriormente no Peru. Foi então construído um padrão para o metro, feito de platina e cuidadosamente guardado, em 1799, no prédio dos Arquivos do Estado, em Paris.

Assim nasceu o atual *sistema métrico decimal*, no qual as subdivisões e os múltiplos do metro são feitos de 10 em 10: temos portanto o centímetro, o decímetro, o milímetro, bem como os múltiplos do metro, como o decâmetro, o hectômetro e o quilômetro.

Atualmente as crescentes necessidades tecnológicas exigem um padrão mais preciso e facilmente reprodutível. O metro é hoje definido como sendo o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Mas voltemos ao tempo do descobrimento do Brasil. Como já mencionamos, a légua a que se refere Caminha em sua carta é, provavelmente, a *légua marítima*, cuja definição também variava de lugar para lugar e de navegador para navegador. No século XVI, considerava-se que um grau do meridiano terrestre correspondia a um certo número de léguas, que alguns navegadores diziam ser 16,7; enquanto outros diziam que era 18 ou mesmo 17,5.

Se o meridiano terrestre mede 40 000 000 m, dividindo esta quantia por 360 teremos que um grau do meridiano eqüivale a aproximadamente 111 111 m. Admitindo que um grau corresponde a 18 léguas, isso nos dá a medida

$$1 \text{ légua marítima} = 6\,173 \text{ m}.$$

No entanto, os registros desses padrões são tão imprecisos, que é possível encontrar documentos atribuindo para a légua marítima o equivalente a 5 555 m.

A *milha marítima* é talvez a única dessas unidades extravagantes que deverá permanecer sendo usada. Ela é hoje definida como valendo 1 852 m, o que a torna igual ao comprimento de um arco de 1 minuto do meridiano terrestre, ou seja, 1/21 600 do comprimento do meridiano. Em navegação, posições são determinadas por ângulos (latitude e longitude), o que torna extremamente cômodo adotar como unidade de distância o comprimento de um arco de ângulo central unitário. Aliás, foi algo parecido com isso o que os matemáticos fizeram ao adotar o radiano.

Felizmente, na atualidade, quase todos os países do mundo adotam o sistema métrico decimal. No Brasil, a lei de 26 de junho de 1862 e o decreto número 5 089 de 18 de setembro de 1872 tornaram o sistema métrico decimal obrigatório a partir de 1º de janeiro de 1874.

Observações

1. As definições das unidades legais de medidas no Brasil são feitas pelo Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – *CONMETRO*.

2. O autor pede para citar seus colegas *Nilton Lapa* (SP) *e Maria Inês V. Faria* (MG), com os quais desenvolveu a atividade que deu origem a este trabalho.