Capítulo 6

Ensino

Alunos inventam problemas

Sylvia Judith Hamburger Mandel

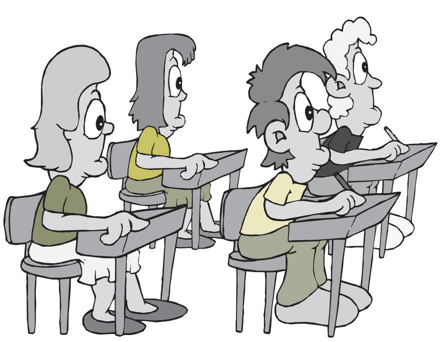
Luciana tem 3 namorados. No dia 12 de junho, dia dos namorados, ela recebeu 25 buquês. Oliver mandou o dobro de buquês de Amilcar, que mandou a metade de Henrique. Quantos buquês cada um mandou?
(Fernanda, Camila)

Na escola onde leciono (Nossa Senhora das Graças) o trabalho com problemas tem sido bastante enfatizado. Há muito tempo, diversos assuntos de Matemática vem sendo introduzidos através de problemas.

Nos últimos anos temos proposto aos alunos, desde a 1ª série, que também eles elaborem problemas.

O mecanismo dessa estratégia, os seus pontos positivos e alguns exemplos de problemas inventados pelos alunos serão o objeto deste artigo.

A estratégia



Introduzido um determinado assunto e tendo já resolvido alguns exercícios, propomos aos alunos que elaborem um ou dois problemas sobre o assunto.

A proposta é para que escrevam os problemas em duplas e os entreguem resolvidos, com os nomes dos autores. Esses problemas são datilografados e uma lista é distribuída a todos os alunos.

Muitas duplas entregam mais do que um problema. Sempre que possível, todos os alunos têm ao menos um de seus problemas incluído na lista. O pedido para que os problemas sejam feitos em duplas tem como objetivo evitar problemas demais, além de provocar um salutar intercâmbio entre os mais e os menos interessados, entre os mais e os menos hábeis e causar animadas discussões envolvendo Matemática.

Ao elaborar uma lista não há muita preocupação quanto à ordem dos problemas, exceto no caso de problemas muito trabalhosos, que vão para o final da lista. A variedade dos problemas propostos pelos alunos costuma ser maior do que a oferecida em livros didáticos, e a ausência de uma classificação por "tipo" é um dos aspectos positivos das listas. Os problemas também não se prendem a um só assunto - os alunos usam com freqüência outros conteúdos que já fazem parte do seu conhecimento.

Formular problemas é uma atividade dos alunos que deve ser realizada várias vezes ao longo do ano. A experiência nos mostrou que, com o passar do tempo, os problemas se tornam mais interessantes e criativos.

Autores: Alunos da 7ª série

Em sala de aula foi abordado o tema *Escalas,* e os alunos fizeram plantas da sala de aula, de seus dormitórios, do quarteirão da escola e resolveram diversos exercícios simples. Foram desafiados a escrever "problemas mais interessantes" do que os que foram propostos pela professora. Seguem-se alguns exemplos:

(a) *Num mapa de guerra a escala era* 1 : 100 000. *No mapa, o alcance do míssil era de* 100 cm. *Qual o alcance real do míssil em quilômetros?* (Bruno, Pedro)

(b) *Marcelo quer fazer a planta de seu quarto mas só tem uma cartolina de* 90 cm *por* 35 cm. *Sabe-se que as paredes do quarto de Marcelo têm as seguintes medidas:* 3m *por* 9m. *Qual seria a escala ideal para desenhar, ocupando a maior parte da cartolina?* (Manuel)

(c) *Um jogador de basquete mede* 2,04m. Para *fazer propaganda de seu time fizeram miniaturas do jogador. A escala é* 1:12. *Quanto mede a miniatura?* (Fernanda)

(d) *Eu fui a Nova Iorque e gostei da Estátua da Liberdade. Então, quando voltei para o Brasil, resolvi fazer uma réplica da estátua no meu quintal. A estátua do meu quintal media* 3m × 0,5m. *A estátua media* 15000mm × 2500mm. *Qual foi* a *escala que eu usei?* (Renata, Mariana)

(e) *Em um banheiro retangular precisa-se trocar os azulejos do box. O box é* 1/4 *do banheiro. O banheiro mede* 6m^2. *Na planta, o banheiro está na escala* 1 : 30. *Quanto mede o box na planta?* (Tatiana, Isabel)

O que há de positivo

– O fato de os nomes dos autores aparecerem nas listas desperta o interesse dos alunos. Eles procuram, de imediato, os problemas inventados por amigos, primos ou irmãos mais velhos (quando as listas foram elaboradas em anos anteriores). A componente pessoal de cada lista os faz tentar resolver com animação alguns dos problemas.

– Os tópicos abordados nos problemas refletem interesses pessoais dos alunos, como os esportes que praticam, os conjuntos de música de que mais gostam, preços de roupas, carros, video games, etc, tornando os enunciados mais significativos para eles.

– Não só os problemas fogem dos “tipos” mas também apresentam, às vezes, dados desnecessários, insuficientes ou contraditórios. Num livro didático, tais problemas seriam considerados fruto de descuido ou despreparo do autor e, como tais, seriam descartados. Nas listas, a ocorrência de um problema “defeituoso” é aceitável, e o problema é discutido como todos os demais. Discernir entre o que é necessário, e o que não é, faz parte da boa resolução de problemas em qualquer área, não só em Matemática.

– Como os próprios autores fornecem as respostas aos problemas propostos, algumas estão erradas. Os alunos se dão conta de que nem sempre uma discrepância no resultado é falha deles. Isso lhes dá maior segurança para resolverem problemas em outras situações. O erro passa a ser visto, por muitos alunos, como uma possibilidade e ocorrência natural.

– Ao propor problemas, os alunos são levados a pensar na linguagem que usam. Posteriormente, eles lerão com mais cuidado, e com espírito mais crítico, o problema escrito por um colega, o que, a médio prazo, promoverá um melhor entendimento de qualquer leitura que fizerem.

– Inventar problemas requer, às vezes, que o aluno pense de “trás para frente”, isto é, se tal pergunta vai ser feita, que dados devem ser fornecidos?

Curiosidades

Algumas vezes, é necessário conversar com os autores sobre os problemas que criaram para evitar constrangimentos na sala de aula. Lembro-me, como exemplo, de um problema envolvendo o peso de uma garota gordinha. Esta, coincidentemente, criou um problema sobre quantos docinhos se podiam fazer com certo número de latas de leite condensado.

Numa outra turma, um grupo de meninos formulou um problema sobre o número de camisinhas que um tarado usava.

Outra vez, um grupo de alunos “micreiros” inventou um problema envol vendo a capacidade de memória de um computador, a quebra e conserto de diversas placas e o preço do conserto. O problema envolvia tantos cálculos, que nem os autores tiveram paciência de resolvê-lo. Haviam, no entanto, trabalhado e pensado muito ao elaborá-lo.

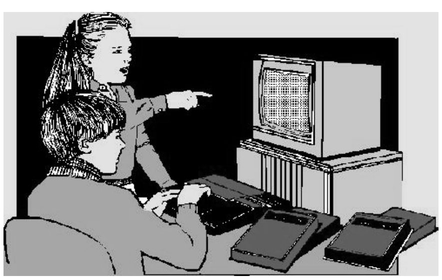
Observação final

Encaro a elaboração de problemas pelos próprios alunos como uma ferramenta adicional, muito valiosa, na tarefa de ensinar Matemática. Ela não substitui as muitas outras ferramentas que nós, professores, usamos. Ela é, sim, uma a mais para ser usada.

A Matemática na escola
Alguns problemas e suas causas

Roberto Markarian

O professor Roberto Markarian é um destacado matemático uruguaio, que tem realizado importantes trabalhos na área de Sistemas Dinâmicos. Embora suas atividades como professor situem-se no nível universitário, sua consciência de cidadão (que já lhe trouxe grandes dissabores durante uma ditadura militar) o leva a preocupar-se com os problemas de ensino no nível médio.



O objetivo principal deste artigo é escrever sobre alguns problemas e situações que se apresentam no aprendizado da Matemática no final do ciclo escolar, mas foi impossível fazê-lo sem me referir a algumas questões muito mais amplas, ligadas às dificuldades da Matemática e a seu aprendizado em geral. As subseções da primeira parte (o ensino da Matemática em geral) estão numeradas **1**, **2**, **3**, ... e as subseções do artigo em si estão ordenadas por letras maiúsculas **A**, **B**, **C**, ...

Estas notas carecem de exemplos detalhados, da experiência própria de trabalhar com crianças de aproximadamente 10 anos, mas podem ter a valia de quem lida e gosta de lidar com jovens cujas dificuldades de aprendizagem de dois qüinqüênios anteriores refletem-se em dolorosos traumas de estudo, e de quem fez do ensino e da pesquisa matemática a sua profissão.

O ensino da Matemática em todos os níveis apresenta-se como um problema insolúvel. Tem causas e manifestações distintas em países com diferentes graus de desenvolvimento econômico e cultural. Algumas têm componentes que são próprios dos países com menor desenvolvimento industrial ou menor independência agronômica ou com economias muito dependentes dos investimentos, das flutuações de mercado ou de políticas externas.

Poder-se-ia resumir a explicação do porquê de a disciplina ser motivo de tantas preocupações para alunos, professores e pais, nos seguintes três aspectos:

O subdesenvolvimento

Em nações onde a aplicação criativa do conhecimento para o desenvolvimento de novas tecnologias não constitui parte da mentalidade dominante, é difícil aumentar o prestígio e o reconhecimento das ciências básicas, necessárias para tais desenvolvimentos. Nesses países (incluso o do autor desta nota), os que marcam explícita ou implicitamente os rumos da evolução econômica, dos investimentos, da ocupação de mão-de-obra têm por orientação central a importação de maquinária ou técnicas e a sua adaptação ao terreno ou produção primária do lugar. Portanto, dificilmente eles promovem uma cultura na qual a criação de conhecimento autóctone, sustentado no conhecimento básico, ocupe um lugar destacado no desenvolvimento global.

Isso não significa que seu discurso, suas arengas etc. não sejam carregados de alentos à promoção das ciências e seu caráter nacional. Mas me refiro a aspectos mais substanciais, mais estruturais da sociedade e não somente ao que governantes ou líderes empresariais possam escrever ou dizer. De um modo mais claro e esquemático: em uma economia que não está baseada na criação de técnicas próprias para resolver os seus problemas, não há promoção do conhecimento científico e menos ainda da ciência mais abstrata, a de menor conteúdo fatual: a Matemática.

Como exemplo da importância do conhecimento básico para a criação de ciências e técnicas a fim de atender às necessidades autóctones (nacionais, diríamos agora), seria útil citar o que sucedeu na América Pré-Hispânica. O melhoramento do milho, a decisão de quando plantar, a introdução da roça como procedimento para ganhar novos terrenos cultiváveis, são invenções próprias que respondiam à geografia e aos meios disponíveis: foi criação autóctone de tecnologia. Esses progressos foram simultâneos com a criação de sistemas de contagem do tempo (calendário, saber astronômico), com a invenção de sistemas de numeração e de formas de linguagem escrita. Tudo isso é conhecimento básico, sem o qual aquelas necessidades agrícolas não poderiam ter sido satisfeitas. A invenção de tecnologia própria – incluindo a adaptação de técnicas conhecidas aos problemas, materiais, tradições do lugar – é impossível se não foram desenvolvidas vigorosamente as ciências básicas de tais tecnologias: Biologia, Física, Química, Matemática e os procedimentos que se situam entre essas ciências e suas aplicações.

A Matemática é difícil

O objetivo da Matemática é um tanto imperceptível. A abstração das propriedades quantitativas ou geométricas que caracterizam as primeiras noções estudadas nos cursos de Matemática constituem um processo de complicada assimilação. Pequenos erros nesse processo tornam muito difícil a assimilação de novos conceitos e procedimentos, gerando grandes traumas futuros. Por outro lado, a memorização de uma nomenclatura diferente e muito precisa introduz componentes que não são usuais na vida diária.

Por sua vez, tais formas de pensar, de poder "desmaterializar" os objetos, são parte de nossa relação com a natureza, o que nos diferencia de outros animais avançados. A compreensão de propriedades globais dos objetos que nos são apresentados não se faz por mera acumulação. Faz-se por reordenação, por associação de semelhanças, que são parte fundamental do conhecimento matemático. A aceitação e compreensão das dificuldades da Matemática e, por sua vez, da necessidade de sua aplicação são básicas para poder analisar o problema do ensino da Matemática em nível alto e com competência.

O ensino da Matemática é problemático

O grave problema do ensino da Matemática não é exclusividade dessa disciplina. Atualmente admite-se que todo o sistema educacional está em crise. Que a velocidade das mudanças nos grandes e pequenos processos introduziu imensas dificuldades na sistematização do conhecimento e, portanto, em sua divulgação e ensino. Sem ser muito rigoroso, pode-se dizer que a interação aluno-docente que caracteriza o aprendizado dá-se sobre a base do estado atual do conhecimento e está fortemente influenciada pelos interesses de ambas as partes. O docente, a parte conservadora dessa relação, a que representa o social, o adquirido, o que deve ser conservado (nesse sentido usei a expressão "conservadora"), tem grandes dificuldades para manter-se em dia com os conhecimentos. O estudante é sacudido por elementos alheios ao ensino formal: os meios de comunicação, a cultura de consumo, em alguns casos; o atraso cultural, a destruição da família, a pobreza endêmica, em outros; pior ainda, tudo misturado, muitas vezes. Para cumprir adequadamente sua função, o docente deveria saber como esses aspectos refletem-se no estudante, coisa que, na atualidade, em geral não acontece. A defasagem entre o que o docente tem para transmitir e o que o estudante espera receber gera um desinteresse que interfere de maneira fundamental no aprendizado.

As questões analisadas em **1** e **2** produzem efeitos característicos nas crises do ensino de Matemática. Há um processo de descrença da importância do conhecimento abstrato, beneficiado pelas questões econômicas e sociais a que nos referimos no começo e também pela cultura do lucro imediato, do "o que é bom é o que se pode consumir". Tudo isso gera uma espécie de despreocupação e, em muitos casos, uma desnaturalização do conhecimento matemático. Com isso quero dizer que a excessiva ênfase nas motivações, em tornar atrativo o objeto do estudo, leva a um descuido do ensino da Matemática em si, das estruturas gerais e suas relações.

Por outro lado, as dificuldades da disciplina também se manifestam em freqüentes mudanças de programas, métodos pedagógicos e ênfases temáticas que dificultam a formação dos seus docentes. Esses não conseguem ajustar sua formação e atualização às mudanças da disciplina e às incrementadas (tanto em número quanto em qualidade) solicitações sociais. Nos últimos 30 anos, por exemplo, houve, de início, uma mudança acentuada para um ensino muito formalizado (que se decidiu chamar *Matemática Moderna*) e logo um forte questionamento de tais orientações. Isso causou, inclusive, rancores difíceis de superar entre adeptos de umas ou outras posições.

Tudo isso faz com que a Matemática seja mal ensinada em sua forma e conteúdo, o que constitui uma grave falha social. Do exposto acima fica claro que não sou dos que acham que tudo está nas mãos daqueles a quem ensinamos Matemática; também não creio que somente com um grande esforço pedagógico os problemas do aprendizado da Matemática possam ser solucionados. Porém, a percepção de nossas limitações não nos exime da obrigação de pensar, opinar, dar soluções a problemas tão angustiantes e de indubitável impacto cultural.

No restante deste artigo apresentarei, através de blocos temáticos, alguns dos problemas de aprendizagem da Matemática em crianças que estão finalizando o ensino primário (a 4ª série do ensino fundamental, no Brasil).

A. Prestígio do saber matemático e os temores que gera

O bom desempenho em Matemática é considerado, em geral, como uma mostra de sabedoria e inteligência. Consideram-se as pessoas que têm facilidade para Matemática como gente especial, com algum dom extraordinário: o saber matemático goza de prestígio. Isso se deve, por um lado, ao fato de que as dificuldades da disciplina fazem com que quem a sabe ou a aprende com facilidade seja visto como diferente, especialmente dotado; por outro lado, os jovens com particular facilidade para a Matemática, em geral, têm também facilidade para formar conceitos em outras disciplinas, para continuar a concatenação lógica de raciocínios, até para encontrar semelhanças em geografia, física, ...

Esse "prestígio", por sua vez, gera em quem tem dificuldades uma aversão muito forte à Matemática. Sentem-se aparvalhados, passam a ignorar a beleza, a coerência e a ordenação da disciplina e a recusar qualquer tipo de formalização, por sua semelhança com a formalização matemática. É bastante comum que os estudantes com dificuldades sejam mais retraídos, sintam que não poderão ocupar papéis importantes em suas atividades ou obter ocupações de destaque e modernas. Consideram-se humilhados perante seus professores de Matemática e, mais adiante, muitos deles serão incapazes de ter uma base mínima para incorporar conhecimentos matemáticos ou meramente quantitativos, que lhes permitam avançar normalmente nos seus estudos.

B. Memória com detalhes

O conhecimento matemático inclui a memorização sistemática e classificada de uma quantidade muito grande de dados, de informação que deverá ser utilizada automaticamente: as tabuadas da multiplicação, os valores de algumas funções (trigonométricas, por exemplo), o significado e valores de muitos símbolos (π, por exemplo), equivalência entre diferentes unidades de medida, valores de raízes quadradas, fórmulas de comprimentos, áreas, volumes. Essa informação deve ser "guardada" com precisão, com detalhes: 3 vezes 8 não é "quase" 25 é 24; símbolos muito parecidos são distintos se cumprem funções diferentes; a vírgula dos números decimais deve ser colocada em um lugar exato, se desejamos representar um número dado, etc.

Tornar operativa, com velocidade, essa massa de informação é parte do conhecimento matemático. Quem tiver dificuldades para recordar algumas dessas informações elementares, dificilmente poderá acompanhar raciocínios mais complicados ou fazer exercícios que envolvam essas operações.

C. Procedimentos padronizados

Além da armazenagem de informação, o saber matemático inclui a realização de um número muito grande de operações e rotinas a serem aplicadas em ordem correta e com precisão. Nessas operações incluo certas propriedades de uso sistemático. Vejamos alguns exemplos: a comutatividade das operações elementares (cujo conhecimento diminui o número de resultados a recordar); "o símbolo + transforma-se em – ao passar uma parcela para o outro lado do símbolo =”; a realização de operações iterativas, em que a repetição é a chave do êxito (a divisão, por exemplo). Essa habilidade inclui também a boa utilização ou o adestramento na memória presente, para não ficar perdido no meio de um raciocínio de muitas etapas.

Essa capacidade para integrar diferentes informações e processá-las de maneira mais ou menos rotineira é também parte da boa formação em Matemática. A falta dessa capacidade gera a impossibilidade de saber o que fazer com objetos matemáticos usuais e como prosseguir com operações previamente estudadas.

D. Linguagem, símbolos e padrões

O aprendizado da Matemática depende muito de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos. Essas linguagens e simbolismos a tornam, por sua vez, mais inacessível. Pode-se dizer que são um “mal necessário”. É interessante observar que esses elementos decisivos no progresso da Matemática demoraram muito para se desenvolver com toda a força: consolidaram-se só no século XVI com o desenvolvimento da notação e do formalismo da Álgebra.

As dificuldades inerentes à linguagem e ao simbolismo matemáticos obrigam a tomar o devido cuidado na utilização de tais instrumentos no ensino. A linguagem em si não motiva; as idéias sim. Nenhum aluno pode interessar-se por algo em que não veja algum elemento que satisfaça ou aguce sua curiosidade. Isso é verdade inclusive para os matemáticos que contribuem para o desenvolvimento da sua ciência. Estão interessados nas idéias, métodos e técnicas que fazem parte da sua disciplina. Vamos introduzindo linguagens e simbolismos por necessidades práticas. O mesmo pode se dizer no ensino: introduzi-los quando se tornam necessários para auxiliar o aprendizado de coisas verdadeiramente relevantes.

Nessa categoria de problemas também entram os padrões, esquemas, palavras-chaves que o estudante deve poder reconhecer rapidamente para utilizar as técnicas adequadas. As representações geométricas, o reconhecimento de figuras ou de representação gráfica (colunas, diagonais, conjuntos de números), formam parte das perícias a que fazemos referência neste item. Esses procedimentos incluem doses muito grandes de abstração, pois esses padrões aparecem com apresentações explícitas ou visuais muito diferentes. A interpretação precisa, inclusive visual, de algumas definições abstratas é crucial para avançar na compreensão de diversos entes geométricos: circunferência, paralelas, equilátero.

A linguagem, os símbolos e os padrões matemáticos bem assimilados e utilizados sistematicamente em outras esferas da atividade e na ciência são ferramentas de comunicação e sistematização fundamentais. Enriquecem a capacidade de transmissão, simplificam modos de pensar, ajudam a chegar diretamente ao cerne dos problemas. Mais ainda, o bom manejo desses elementos na linguagem oral clarifica a apresentação de idéias complicadas e evita circunlóquios e rodeios na descrição de situações.

E. Lógica e conceitos

As cadeias de raciocínios, características da Matemática, são uma das questões principais que o estudante deve aprender. Bertrand Russel escreveu que, na realidade, a Matemática é um grande silogismo, e que uma vez dadas certas definições, grandes áreas da Matemática se constroem “pensando bem”. Não concordo com essa idéia *in totum*: grande parte do que me propus a descrever na primeira parte do trabalho (em particular no item **1**) refere-se à **correspondência da Matemática com a realidade, ao seu caráter não arbitrário**. Porém, não é menos certo que o bom aprendizado da Matemática inclui os grandes elementos do raciocínio correto, da dedução possível, das dependências permitidas entre conceitos.

Essas virtudes do modo de pensar matemático não devem ser contrapostas às características antes anotadas, em particular à necessária memorização de definições e procedimentos; muito menos ainda nas etapas iniciais da educação.

O progresso na compreensão dos mecanismos lógicos necessita de um grau avançado de conceituação, especialmente nessas etapas formativas. É impossível raciocinar bem se os objetos do raciocínio não estão definidos com precisão, se não se conhecem os elementos que os constituem e seus limites. Muitas vezes uma dose generosa de memória pode esconder grandes carências em certas conceituações (somar quebrados sem saber muito bem o que representam as frações, por exemplo), mas freqüentemente essas carências aparecem, até porque com o passar do tempo tudo se esquece.

A capacidade de resolução de problemas está fortemente baseada nesses graus de conceituação e rigor lógico: identificação das perguntas colocadas, utilização de alternativas válidas, mudança de estratégia para atacar o problema, em razão do fracasso de algo utilizado previamente.

Ainda assim, as coisas devem caminhar no seu devido tempo. Do mesmo modo como na evolução das idéias, também no ensino os conceitos devem ser introduzidos à medida que vão sendo solicitados pelos tópicos ensinados, e o aluno esteja em condição de apreciar criticamente a importância do que está aprendendo. Caso contrário o resultado é negativo, pois, em lugar de estimular o aprendizado, produz o efeito de gerar desinteresse por uma Matemática que trata de objetos imperceptíveis, que não são necessários nem em sua estrutura intrínseca.

Nisso também a evolução da ciência dá bons exemplos: os matemáticos profissionais lidaram com funções durante quase dois séculos antes de chegar à sua definição geral. Somente deram uma definição precisa (com seus conteúdos e limites) quando a resolução de questões delicadas (de convergência) tornou isso absolutamente necessário. A introdução prematura de conceitos, como os de função injetora, sobrejetora, inversa, composta, sem a utilização adequada desses conceitos – e, portanto, sem revelar sua real importância – é um exercício gratuito que se exige do estudante. Gratuito e contraproducente.

F. Necessariamente estimativo

A resolução de problemas destaca, além dos aspectos lógicos e de conceituações anteriormente aludidos, a importância do quantitativo em Matemática: de saber estimar resultados e descartar soluções improcedentes. Assim como é inaceitável que quem faz cálculos para achar a velocidade de um ônibus obtenha como resultado 900 km por hora e não procure o erro, um aluno médio de Matemática, ao multiplicar sucessivamente três números de um algarismo, deve descartar resultados que envolvam milhares.

A realização de cálculos "grosseiros" deve ser incentivada pelos professores, ainda mais em tempos em que tais cálculos são feitos com pequenas máquinas, perdendo-se a noção de resultado aproximado, da estimativa. É inadmissível que o bom raciocínio, que a boa memorização etc. não se complementem com o resultado mais imediato do saber matemático: **saber quantificar fenômenos e acontecimentos, e operar com os números da quantificação**.

G. Caráter cumulativo

Por último, creio ser útil destacar o caráter cumulativo do conhecimento matemático. Esse aspecto é particularmente sentido pelos docentes dos ciclos superiores do ensino: as carências acumuladas, incluindo as carências de informação e de sistemática, geram imensas dificuldades na compreensão de novas idéias.

Expresso com os devidos respeitos, pode-se ser um excelente estudioso de ramos amplos da História sabendo-se pouco do papel de Carlos Magno na Idade Média, mas não se pode aprender Matemática nos últimos anos do ensino médio, se não se sabe somar frações. O saber matemático não tem a apresentação de um queijo Emental: uma deliciosa massa com grandes buracos. A evolução do aprendizado da Matemática nos ciclos primário e secundário (ensino básico) deveria de preferência ser uma massa uniforme cujos buracos seriam considerados como vazios a preencher.

Muitas vezes diminui-se a importância desse caráter cumulativo dos estudos da Matemática; considera-se uma exigência a mais dos professores, outra reivindicação dos aspectos globais da matéria. Não é assim. A boa compreensão dos conceitos anteriores, sua memorização, a prática, são quase imprescindíveis para entender razoavelmente as etapas mais avançadas. Facilita o aprendizado, consolida mais facilmente o novo. Todos os traços analisados entre **B** e **F** abonam a importância do acúmulo no conhecimento matemático. Peço ao leitor uma breve recapitulação desses itens para convencer-se de que carências em alguns aspectos refletem-se em debilidades em outros.

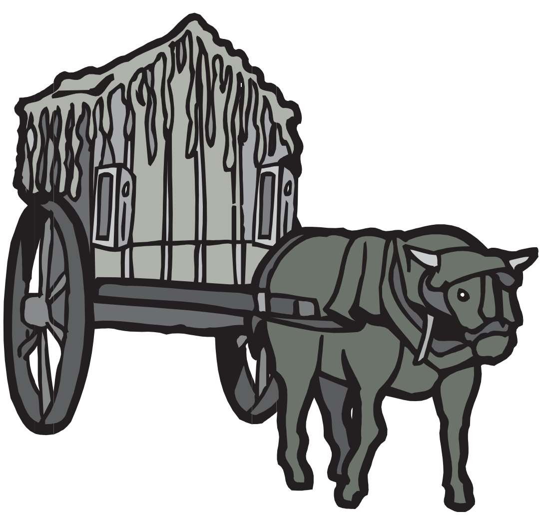
Espero que estas anotações sobre o ensino da Matemática sejam úteis para os leitores deste livro. De minha parte achei muito interessante e estimulante fazer essa ordenação sobre temas que, de outra maneira, só chamam minha atenção quando recebo as queixas que habitualmente se fazem sobre as dificuldades para compreender a disciplina.

A carroça na frente dos bois

Anamaria Gomide Taube

Recentemente fui abordada pelo meu filho Gustavo, de 9 anos, que ora inicia seus estudos na 4.ª série do ensino fundamental, com a seguinte questão que lhe havia sido encomendada como tarefa de casa pela professora. Esta solicitava que o aluno atribuísse um ‘‘sim’’ ou ‘‘não’’ ao enunciado: ‘‘A operação de subtração, no conjunto dos números naturais, possui a propriedade de fechamento’’.

Primeiramente fez-se necessário esclarecer o conceito de fechamento de um conjunto com relação a uma operação. Exemplifiquei dizendo que quando somamos dois números naturais obtemos um terceiro número natural como resultado daquela operação e portanto este conjunto é fechado para a adição. Foi então que fui surpreendida com a observação da criança: “mas mamãe, poderia dar outra coisa?” Naquele momento compreendi que o problema não estava somente na falta de compreensão do novo conceito, mas principalmente na inexistência de expectativa para um aluno da 4ª série com respeito a outros números que não os naturais, já que até aquele ponto ele nada sabia sobre números inteiros. Também não me pareceu lógico explicar o não fechamento do conjunto com relação à operação de subtração, baseado em uma situação que a seu ver nunca existiria. Como justificar, que, por exemplo, $2 - 5$ não é um número natural se, para ele, realizar a subtração $2 - 5$ é um procedimento impossível. Na verdade tornava-se evidente um impasse advindo da própria conceituação de operação, no caso, binária.



Uma operação binária sobre um conjunto A é uma função do produto cartesiano $A \times A$ em A. Conclui-se que para todo par ordenado (a, b) em $A \times A$, existe um e somente um elemento de A associado ao par através dessa aplicação. Neste caso, não faz sentido falar do fechamento do conjunto A em relação à operação pois esta deve poder ser efetuada sobre quaisquer dois elementos do conjunto dando como resultado necessariamente um elemento do conjunto. No entanto a propriedade do fechamento pode ser definida e verificada em subconjuntos de A. Podemos considerar um subconjunto S, não vazio, de A e a mesma operação binária definida em A e induzida sobre S. Efetuando a operação entre dois elementos quaisquer de S, existem duas possibilidades:

1. O resultado da operação é sempre um elemento de S. Neste caso dizemos que S é fechado para aquela operação;

2. Para algum par de elementos de S o resultado da operação não é um elemento de S (embora pertença a A). Neste caso dizemos que S não é fechado para aquela operação.

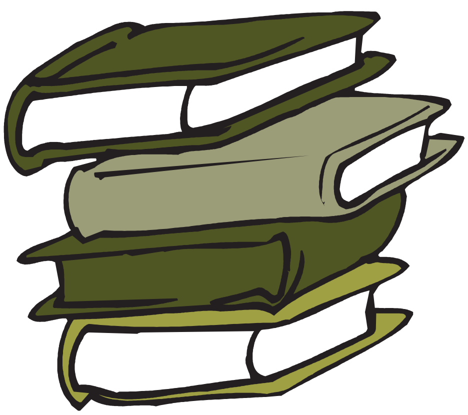
A compreensão, segundo este ponto de vista, do não fechamento da subtração requer o conhecimento do conjunto de números inteiros. A subtração no conjunto dos números naturais não é uma operação, mas sim uma propriedade da adição: "Dados a e $b \in N$ com $a \geq b$ existe um único $c \in N$ tal que $a = b + c$". c é a diferença entre a e b e escreve-se $c = a - b$.

Conclui-se, portanto, que o problema é conceitual, exigindo grande rigidez e formalização. Não é de se esperar que uma criança antes de completar a primeira década de vivência e aprendizagem esteja preparada e amadurecida para analisar, refletir, e compreender situações de tamanha abstração.

Cabe a nós, professores e pais, tentarmos estar sempre atentos para a forma de raciocínio objetivo, concreto e cristalino de nossas crianças. Antes que lhes sejam impingidas e cobradas listas de propriedades a respeito de um conceito novo, é imprescindível que lhes sejam fornecidos materiais em exemplos e exercícios e os mais diversos subsídios, para que, estimuladas pela curiosidade, percebam a existência de um universo bem maior do que aquele conhecido por elas. Depois elas mesmas irão deduzindo propriedades e tirando suas próprias conclusões. Tudo isso feito a seu tempo, caminhando sem atropelos, como os bois na frente da carroça, que lentamente efetuam o seu trabalho e atingem o seu objetivo.

Ensino no ensino fundamental (uma experiência)

Cristina Frade



Na tentativa de estimular o hábito da leitura e recuperar o valor e a utilidade do livro didático, venho, há alguns anos, desenvolvendo uma forma de trabalho pouco convencional com meus alunos de Matemática, da 5ª à 8ª série do ensino fundamental: a leitura e a interpretação de textos do livro de Matemática.

Hoje é consenso que o livro de Matemática tem sido aberto pelos alunos apenas para fazer exercícios. Eles têm deixado o ensino fundamental, incapazes de estabelecer contato com um texto escrito em linguagem matemática e, conseqüentemente, sem ter adquirido habilidades que considero fundamental no processo de aprendizagem: a independência e a maturidade para estudarem sozinhos.

Como é feito meu trabalho em sala de aula?

Dentre as muitas coleções de Matemática de 5ª à 8ª séries que existem no mercado, e às quais consigo ter acesso, escolho aquela que, a meu ver, coloca os conceitos matemáticos com maior precisão e clareza e é mais coerente em sua linguagem, do primeiro ao último volume.

De posse do livro-texto e do caderno de atividades (complemento do livro-texto com exercícios propostos), os alunos se reúnem, em grupos de dois, e o processo de estudo segue os seguintes itens:

1. leitura de determinada unidade;

2. discussão em grupo, à medida que a leitura se processa;

3. exercícios sobre o tópico estudado;

4. seminário orientado pelo professor, ao término do estudo da unidade, com a participação dos alunos;

5. resumo feito pelo professor, ressaltando as idéias mais importantes, ligando o que foi lido à unidade anterior e à posterior;

6. crítica do texto e sugestões para os autores.

Observação

Várias vezes deparei-me com conceitos ou exercícios resolvidos de modo impreciso. Quando isso ocorre, chamo a atenção sobre o fato, faço uma crítica, na esperança de que os alunos percebam a imprecisão e sugiro a substituição de um argumento por outro.

Para esclarecer melhor essa questão, darei como exemplo um fato ocorrido, no ano passado, numa turma da 7ª série, quando estudávamos *Sistemas de Equações do Primeiro Grau a Duas Variáveis.* No capítulo VI do livro-texto, havia um sistema a ser estudado:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{2}{x-3} \\ 2x + 5y = 11. \end{cases}$$

De acordo com o texto, o domínio de validade era

$$D = \{(x,\ y) \in IR \times IR\ /\ (x,\ y) \neq (3,\ 1)\}$$

o que não está correto.

Fiz perguntas aos alunos até que alguns perceberam qual deveria ser o domínio de validade correto. Perguntei quem se disporia a escrever uma carta aos autores, sugerindo a mudança necessária. No dia seguinte, recebi de um aluno a carta que transcrevo abaixo:

Prezados Editores,

Sou aluno de 7ª série do Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais, e faço uso do livro Matemática, Conceitos e Histórias, *editado pelos senhores.*

Ao ler o capítulo VI deste, percebi um erro de edição no item 4.

Notem que o *domínio de validade do* 2º *exemplo do sistema da página 101 está errado.*

Esse domínio diz que $(x, y) \neq (3,1)$ e, dessa maneira, *dá-se* a entender que *o único resultado impossível desse* sistema *é o* par *ordenado* (3,1). Entretanto, qualquer resultado que tenha $x = 3$, ou $y = 1$*, será impossível. Pois se, por exemplo, o* resultado for (4,1), *o resultado será impossível, já* que y não pode ser igual a 1.

Assim, o certo seria colocar o domínio de validade da seguinte maneira:

$D = \{(x, y) \in IR \times IR \,/\, x \neq 3 \text{ e } y \neq 1\}$. Espero que concordem comigo.

É verdade que, no início desse trabalho, os alunos apresentam uma certa dificuldade em interpretar o texto e voltar a ele tantas vezes quantas forem necessárias para resolverem os exercícios. Isso acontece devido à falta de costume de ler um texto de Matemática.

Mas, à medida que o tempo vai passando, e eles vão se familiarizando com a linguagem, a atividade vai se tornando muito agradável. Os alunos não só gostam de trabalhar com o livro, como sentem que seus pais não jogaram dinheiro fora ao comprá-lo.

É certo, também, que esse trabalho reforça a importância da interpretação de texto, tão importante em Português, História e Geografia e enriquece qualquer metodologia de ensino.

Trabalhando desse modo, o professor estará tentando:

– incentivar o hábito da leitura;

– incentivar a independência de estudo do aluno;

– proporcionar maior participação do aluno nas aulas;

– desenvolver o espírito crítico da leitura (questionando o que se lê);

– despertar a capacidade do aluno para redigir um texto em linguagem matemática (mesmo para sugerir uma correção);

– apresentar-se ao aluno como um orientador, e jamais como o todo-poderoso detentor do saber.

E lá vamos nós de novo!

Flávio Wagner Rodrigues

Os leitores que estão hoje na casa dos 30, muito provavelmente tiveram seus primeiros contatos com a Matemática, aprendendo noções sobre conjuntos e estruturas algébricas. As idéias da chamada Matemática Moderna, que surgiram na década de 60, recomendavam que essas noções fossem introduzidas no início do aprendizado. Essa onda durou até o final dos anos 70 e teve opositores ferrenhos e defensores exaltados.

Na edição latino-americana da revista *Time*, de 25 de agosto de 1997, o cenário está pronto para uma nova batalha que promete repetir aquela que se travou, envolvendo a Matemática Moderna. Na reportagem intitulada *This is Math?* a revista descreve os novos métodos que vêm sendo utilizados nos Estados Unidos, especialmente no estado da Califórnia.

O objetivo seria tornar a Matemática mais interessante para o estudante, trocando a tabuada e a memorização de teoremas pela discussão de problemas em grupo, utilizando calculadoras e materiais didáticos apropriados.

O novo método, chamado de matemática *inventiva* ou *iterativa*, pretende ensinar as crianças a pensarem por si mesmas, contribuindo assim para desenvolver seu raciocínio matemático.

Os opositores, que chamam ironicamente o método de *new new Math*, argumentam que os estudantes podem estar gostando muito dos jogos e problemas, mas que é questionável se eles estão mesmo aprendendo alguma coisa.

O governo americano, que está investindo 10 milhões de dólares por ano no novo programa, espera que ele contribua para melhorar o desempenho dos estudantes americanos com relação aos seus colegas dos tigres asiáticos.

Para acalmar os pais enraivecidos que reclamam que bons estudantes precisam de uma calculadora para saber quanto é 10% de 470, o estado da Califórnia está propondo aulas tradicionais de Matemática como opção no currículo escolar.

É interessante observar que, quase sempre, situações como essa conduzem a uma radicalização de posições. De um lado, os proponentes do novo método, com o objetivo de convencer a comunidade (e também de obter recursos para o projeto), adotam a posição dogmática de que fora dele não existe salvação. Por outro lado, os oponentes partem do princípio de que as novas idéias não passam de um amontoado de asneiras. Do ponto de vista prático, isso impossibilita chegar a um consenso intermediário que permita o aproveitamento de uma ou outra eventual boa idéia que porventura o novo sistema possa conter.

Resta-nos aguardar os acontecimentos, lembrando a experiência passada com a Matemática Moderna e o filósofo Santayana, segundo o qual os povos que não aprendem com sua história estão fadados a repeti-la.