

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

EXPLORANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA

ATIVIDADES

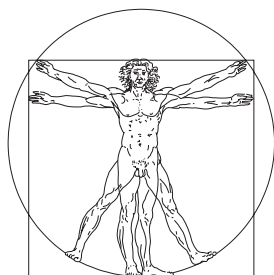
VOLUME II

BRASÍLIA
2004



A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos “lendo” na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. É quase impossível abrir uma página de jornal, cuja compreensão não requeira um certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem que lhe é própria – porcentagens, gráficos ou tabelas são necessários na descrição e na análise de vários assuntos. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Um médico que interpreta um

APRESENTAÇÃO



eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático; ao dar um diagnóstico, está utilizando o raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística. Um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcios na época dos faraós. Uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.

Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes, parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno, relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Para isso, é importante compartilhar experiências que já foram testadas na prática e é essencial que o professor tenha contacto com textos de leitu-





APRESENTAÇÃO

ra acessível, que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos.

Inserir o conteúdo em contexto mais amplo, provocando a curiosidade do aluno, ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através da real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. Não se trata, é claro, de repetir um caminho que a humanidade levou séculos para percorrer. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões “do seu jeito”. O espaço para tentativa e erro é importante para desenvolver familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. Da mesma forma que é possível ler um texto palavra após palavra, sem compreender seu conteúdo, é também possível aprender algumas “regrinhas” e utilizar a Matemática de forma automática.

Com o objetivo de ajudar o professor nos vários campos apontados, reunimos uma coletânea de artigos extraídos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.

O material aqui apresentado sugere abordagem contextualizada e o uso de material concreto e apresenta uma variedade de situações cotidianas em que a matemática se faz presente. Ao mesmo tempo, explora, em cada caso, o conteúdo de forma rigorosa e sistemática, levanta problemas e indica soluções e, nesse processo, expõe os meandros do raciocínio matemático.

Os textos escolhidos estão distribuídos em dois volumes e abordam conteúdos curriculares da 5ª à 8ª série do ensino fundamental.

No primeiro volume incluímos artigos que tratam de História, Geografia, Astronomia, situações do cotidiano, cultura geral, crônicas e problemas. Enfim, muito do que possa fornecer situações com modelagem matemática, ligando a Matemática ao desenvolvimento do conhecimento humano de diversas áreas, foi aqui reunido. Os artigos possibilitam que o professor amplie sua visão e insira os conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar, de modo que possam ser utilizados para desenvolver atividades interessantes junto aos estudantes, explorando novas perspectivas e permitindo um outro enfoque.

No segundo volume são sugeridas atividades em sala de aula, utilizando materiais de fácil acesso (canudos, cartolina, jornal, barbante, etc.) ou explorando situações do cotidiano em que a matemática está presente. A atividade lúdica está sempre ligada a conteúdos matemáticos, que são explorados e aprofundados.

O professor e educador George Polya (1887-1985), autor do livro *A arte de resolver problemas*, afirmava, muito adequadamente, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela. Com estes dois volumes esperamos compartilhar com nossos colegas professores experiências bem sucedidas em sala de aula e, sobretudo, um pouco da beleza e da riqueza da Matemática.

É com grande entusiasmo que a Secretaria de Educação Infantil e Fundamental realiza este projeto, agradecendo a participação da comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

VOLUME 2

ATIVIDADES EM SALA DE AULA



Introdução

Uma das grandes dificuldades no ensino da Matemática é a linguagem que precisa ser utilizada. Muitas vezes percebemos que os alunos compreendem a “idéia” mas não são capazes de manipular a linguagem. Outras vezes, o que é pior, manipulam a linguagem de forma automática sem apreender seu significado.

Na coletânea de textos aqui apresentada descrevem-se atividades lúdicas e instigantes a serem desenvolvidas em sala de aula, juntamente com sugestões de que conteúdos podem ser motivados, melhor entendidos, ou descobertos pelos alunos no decorrer das atividades. Procura-se trabalhar com objetos, jogos, materiais concretos, ou situações do cotidiano do aluno, mostrando que a Matemática está presente na compreensão e solução de problemas do dia-a-dia.

O objetivo é fazer com que o aluno, diante de um problema concreto, “ traduza ” a situação para a linguagem matemática e resolva o problema. Percorrendo esse caminho, ficam mais claros a motivação dos conteúdos e o papel da linguagem para expressar conceitos e guiar o pensamento lógico.

Vejamos alguns exemplos:

Atividades como *Fechando o dominó* e *O jogo de dominós* levam a perguntas sobre fatos conhecidos do jogo de dominós, cujas respostas envolvem o estudo de paridade numérica, contagem e operações aritméticas.

O adivinho indiscreto descreve uma mágica intrigante, que estimula a curiosidade dos alunos e, despertado o interesse em entender como a mágica é possível, permite o estudo de representação na base dois, de maneira interessante e agradável. O professor pode, inclusive, modificar a mágica de modo a motivar o estudo de representação na base decimal ou em outras bases.

A Geometria, operações aritméticas e o cálculo de raízes aparecem juntos em atividades como *Origamis* (dobraduras) e *Nomogramas de papel*.

A utilização de situações da realidade está em atividades como *Você sabe ler seu relógio de luz?* ou *Como é feita sua conta de luz e água?* ou *Porque o parafuso é sextavado?* entre outras.

A fatoração de um trinômio do segundo grau pode ser “visualizada” com o material concreto e o quebra-cabeças da atividade *Fatorando fisicamente*.

No atividade ... *probleminhas* há problemas interessantes e instigantes, que permitem ao professor apresentar aos alunos desafios que motivam o estudo de diversos conceitos matemáticos.

É importante que o professor tenha consciência de que o aprendizado da Matemática no ensino fundamental não pode ser alcançado apenas com atividades lúdicas e agradáveis, mas acreditamos que permear as aulas usuais com aulas diferentes e motivadoras pode ser um diferencial no despertar dos alunos para a beleza da Matemática e para a sua utilização prática, cada vez mais indispensável no nosso mundo atual.

ÍNDICE

A Matemática e o caipira	11
<i>LUIZ MÁRCIO IMENES E JOSÉ JAKUBOVIC</i>	
A Geometria das chapas perfuradas	15
<i>LUIZ MÁRCIO IMENES</i>	
Origami e geometria	24
<i>JOSÉ DE OLIVEIRA SIQUEIRA</i>	
$3\pi r$, $2\pi r$ ou $4\pi r$?	28
<i>LUIZ MÁRCIO IMENES</i>	
Por que o parafuso é sextavado?	30
<i>LUIZ MÁRCIO IMENES E JOSÉ JAKUBOVIC</i>	
Um problema: resolução & exploração	35
<i>LILIAN NASSER</i>	
A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga	39
<i>GERALDO ÁVILA</i>	
O lado romântico da Geometria	47
<i>HIDEO KUMAYAMA</i>	
Você sabe ler seu relógio de luz?	49
<i>ERNESTO ROSA NETO</i>	
Como é feita sua conta de luz e água	51
<i>HIDEO KUMAYAMA</i>	
Atividade ludo-pedagógica	53
<i>MOZART CAVAZZA PINTO COELHO</i>	
Nem só Álgebra, nem só Aritmética	55
<i>VIRGOLINA M. VIOTTO</i>	
Números	
Assunto de aula “adição de números relativos”	59
O problema dos quatros “quatros”	61
Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade	62
<i>LÚCIA A. DE A. TINOCO</i>	
Regra de três composta	69
Uso inteligente da calculadora	73
<i>HIDEO KUMAYAMA</i>	
Algarismos romanos. Uma aula diferente	76
<i>MÁRCIA DE OLIVEIRA REBELLO E ROSÂNGELA TORTORA</i>	
Mágicas	
Adivinhação	78
De ouvido	80
<i>ALEXANDRE KLEIS</i>	

O adivinho indiscreto	81
Polígonos de palitos de sorvete	83
<i>LUIZ MÁRCIO P. IMENES</i>	
Uma interpretação geométrica do MMC	85
<i>MÁRIO LÚCIO CARDOSO E OTÂNIO ALVES GONÇALVES</i>	
Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?	87
<i>MARCELO POLEZZI</i>	
Raiz quadrada sem contas ou calculadora	90
<i>JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO</i>	
Nomogramas (calculadoras de papel)	93
<i>MARCELO ESCUDEIRO HERNANDES</i>	
Artesanato e Matemática	98
<i>LUIZ MÁRCIO IMENES</i>	
Caleidociclos	106
<i>INGO VALTER SCHREINER</i>	
Resolvendo fisicamente	112
<i>ANA CATARINA P. HELLMEISTER E MARIA ELISA E. L. GALVÃO</i>	
Varetas, canudos, arestas e ... Sólidos geométricos	122
<i>ANA MARIA KALEFF E DULCE MONTEIRO REI</i>	
O problema dos cinco discos: sorte ou sabedoria?	127
<i>MA-TO FU E ROBERTO ELIAS</i>	
Uma lenda: Torre de Hanoi	132
<i>RENATE WATANABE</i>	
Em que dia da semana foi proclamada a independência do Brasil?	136
<i>PAULO SÉRGIO ARGOLO GONÇALVES</i>	
Dominós	
Fechando o dominó	142
<i>Alexandre Kleis</i>	
O jogo dos dominós (um desafio matemático?)	144
<i>José Lafayette de Oliveira Gonçalves</i>	
O jogo dos quadradinhos	146
<i>HELDER DE CARVALHO MATOS</i>	
O jogo do Nim – um problema de divisão	151
<i>CARLOS ALBERTO V. DE MELO</i>	
A teoria matemática do jogo de Nim	153
<i>INEZ FREIRE RAGUENET E MÁRCIA KOSSATZ DE BARRÊDO</i>	
Resta-um, Resta-zero, e a operação Nim	160
<i>CARLOS AUGUSTO ISNARD, INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA</i>	
O jogo de Euclides	163
<i>JOÃO BOSCO PITOMBEIRA</i>	
Jogos de Sperner	167
<i>JAIME PONIACHIK, ARGENTINA</i>	
... probleminhas da seção Problemas	171
Resposta dos probleminhas	176

A Matemática

e o caipira

Luiz Márcio Imenes

José Jakubovic

Esta é uma divertida história de um advogado que compra um sítio e tem problemas com o fornecimento de água. A negociação da água de uma nascente na propriedade de seu vizinho caipira envolve um interessante diálogo sobre como a área de um círculo varia com seu raio: uma maneira interessante e atraente de estudar áreas, além de informar sobre o atrito da água nas paredes de um cano.

Esta história tem dois personagens: o caipira e o advogado e ela me foi contada por um amigo do advogado. Passou-se há sete ou oito anos nas proximidades de São Paulo.

Vai lá um dia em que nosso amigo advogado resolve comprar um sítio, de poucos alqueires, com a intenção de construir uma casa e nela passar seus fins de semana. Como não há nascente no sítio, resolve mandar cavar um poço, quando fica sabendo que seu vizinho, um caipira que ali mora há muito tempo, tem em sua propriedade uma nascente com água boa e farta. Procura o vizinho e faz a proposta:

— Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo a água para o meu sítio e lhe pago x reais por mês.

A proposta é aceita na hora.

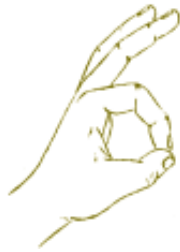
Passa-se o tempo e o advogado resolve implantar no sítio uma criação racional de porcos e, para isso, vai precisar de mais água. Volta a procurar o caipira e lhe propõe trocar o cano de uma polegada por um outro de duas polegadas de diâmetro e pagar $2x$ reais por mês a ele.

O caipira escuta a proposta, não dá resposta imediata, pensa, e passados alguns minutos responde que *não* aceita a proposta.

— Mas, como? – pergunta o advogado. Tem água sobrando, por que não me vende mais e assim também ganha mais?



— É que num tá certo, retruca o caipira, e explica com um gesto.



A água que você me paga
passa por aqui:



e vosmecê qué me pagá o
dobro.

Acontece que o cano que ocê vai ponhá é assim:



Pois é, quem me paga a água que passa por aqui?



E a que passa por aqui?



Com a nossa linguagem a questão fica assim: um círculo de diâmetro 1 cabe 2 vezes num círculo de diâmetro 2 e ainda fica sobrando espaço:



Ou ainda: se o diâmetro de um círculo dobra, sua área não dobra. Ela “mais que dobra”.

O que o caipira não tinha condições de perceber era que o pagamento correto seria $4x$ (quando duas figuras são semelhantes a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus comprimentos correspondentes). Mas para perceber que $2x$ é pouco, basta visualizar um cano dentro do outro.

Novamente a Matemática e o caipira. Agora com o professor e o engenheiro

No texto anterior contamos a historinha do advogado e do caipira, em que este último, usando intuição e bom senso, não aceita o novo pagamento proposto pelo advogado, em consequência da substituição de um cano de 1 polegada por outro de 2 polegadas de diâmetro.

Na ocasião, afirmamos que seria correto o advogado pagar 4 vezes mais ao caipira, porque receberia uma quantidade de água 4 vezes maior.

Após ler o referido artigo, o professor Lindolpho de Carvalho Dias chamou nossa atenção para o seguinte: a área da seção de um tubo com 2 polegadas de diâmetro é, de fato, igual a 4 vezes a área da seção de um tubo com 1 polegada de diâmetro. Mas o volume de água escoado pelo tubo não depende apenas da área; deve-se considerar também o atrito da água nas paredes do cano. Esse atrito depende da área lateral do cano. Considerando fixo o comprimento do cano, o atrito será função apenas do perímetro da seção transversal, que é um círculo.

No caso do cano de 1 polegada de diâmetro, o perímetro da seção é igual a $\pi \times 1 = \pi$ polegadas e no caso do cano de 2 polegadas o perímetro é $\pi \times 2 = 2\pi$ polegadas. Em quatro tubos de 1 polegada a soma dos perímetros é 4π polegadas. Portanto em um cano de 2 polegadas o atrito é menor do que em quatro canos de 1 polegada.

O advogado paga x reais pela água que passa pelo cano de 1 polegada. Se colocasse 4 canos de 1 polegada pagaria $4x$. Colocando um só cano de 2 polegadas deverá pagar mais que $4x$ pois, como vimos, o atrito neste caso é menor do que em quatro tubos de 1 polegada. Para determinar o valor correto, o assunto exige conhecimentos de especialistas. Foi assim que procuramos o professor Dr. Carlito Pimenta, da Escola Politécnica da USP, que é engenheiro hidráulico. Ele nos resolveu o problema, mas a resolução é de difícil compreensão para nós que não somos especialistas da área, quanto mais para o caipira e o advogado. Vale a pena contar que muita Matemática elementar entrou em cena: funções (de mais de uma variável), gráficos, logaritmos, um pouco de Geometria, potências (de expoente cinco), raízes quadradas etc.

Chega-se, por fim, à conclusão de que a vazão em um cano de 2 polegadas é, aproximadamente, 6,4 vezes maior que em um cano de 1 polegada (como é grande a influência do atrito neste processo!).

Nem o advogado, nem o caipira (e nem nós, autores deste artigo) imaginávamos que o cálculo correto do valor a ser pago necessitasse de tanta Matemática!

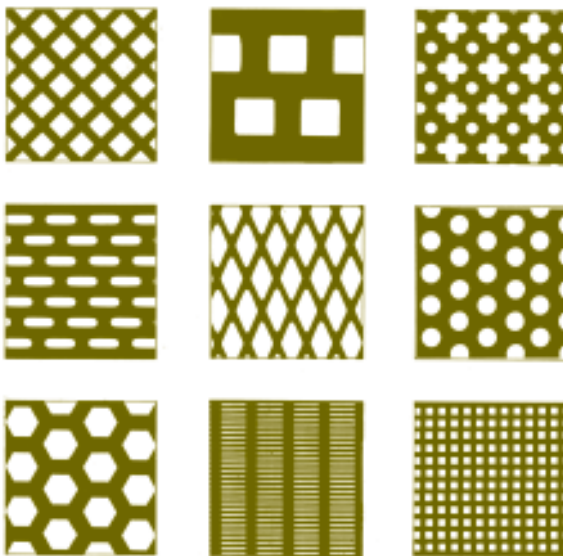
A Geometria das chapas perfuradas

Luiz Márcio Imenes

Esta atividade, proposta pelo prof. Luiz Márcio Imenes, utiliza material existente no cotidiano do aluno, chapas perfuradas (cercas, portões, forros, divisórias etc.) para estudar vários tópicos de geometria como áreas e medidas. Além disso, trabalha proporção para decidir qual é a porcentagem de área perfurada nas chapas de diferentes formatos.

A porcentagem de área perfurada

Ao escrever este artigo tenho em mãos o catálogo de uma indústria que produz chapas metálicas perfuradas de vários tipos. Veja os desenhos de alguns pedaços dessas chapas:



Essas chapas têm usos variados em diversos tipos de indústrias. Por exemplo, são empregadas na fabricação de filtros. Você já deve ter visto um filtro de ar do motor de um automóvel ou caminhão. Alguns deles são deste tipo:



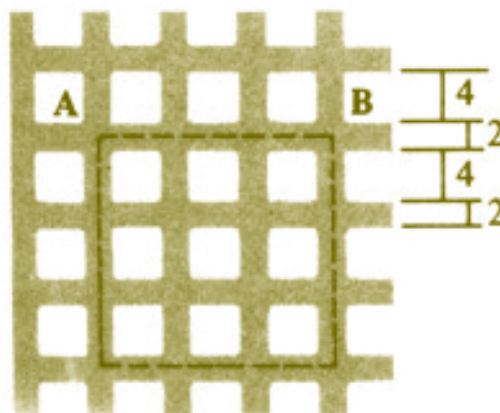
Filtro de ar



Eles têm formato cilíndrico, e sua superfície lateral é feita com uma chapa metálica cheia de furinhos, por onde passa o ar a ser filtrado.

Estas chapas também são usadas como peneiras nas indústrias que produzem minérios, carvão, papel, cimento, etc.

Dependendo do material a ser peneirado, os técnicos que trabalham com isto optam por um ou outro tipo de furo. Decidem ainda qual o tamanho do furo e o espaçamento entre eles. Observando os desenhos das chapas, você percebe que, em alguns casos, a parte furada da chapa é maior que em outros. A relação entre a área da superfície furada e a área da superfície total da chapa, expressa em porcentagem, é chamada, por aqueles técnicos, de *porcentagem de área perfurada*. Vejamos um exemplo. Na chapa seguinte os furos quadrados têm lado 4mm e o espaçamento entre um quadrado e outro é de 2mm.



Para calcular a porcentagem de área perfurada desta chapa, vamos concentrar a nossa atenção num pedaço dela, como por exemplo, o quadrado $ABCD$, cujo lado mede 18 mm (confira). Sua área é 324 mm^2 .

No interior do quadrado $ABCD$ temos 9 furos quadrados, logo a área da superfície furada é: $9 \times 4^2 \text{ mm}^2 = 144 \text{ mm}^2$.

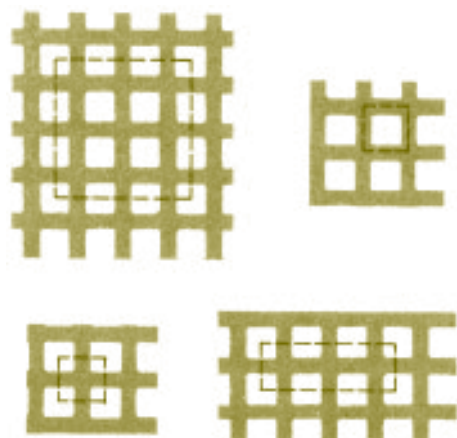
Portanto a porcentagem de área perfurada desta chapa é:

$$p = \frac{144}{324} \cong 0,44 = \frac{44}{100} = 44\%$$

Este resultado significa que, de cada 100 cm^2 de chapa, temos 44 cm^2 de furos. Esta porcentagem p de área perfurada é um indicador de quão furada a chapa é.

Pedaços representativos da chapa

Para calcular p elegemos um pedaço da chapa: o quadrado $ABCD$. Perceba que não era necessário usar aquele quadrado. Podemos raciocinar sobre qualquer pedaço que seja representativo da chapa como um todo, como por exemplo:

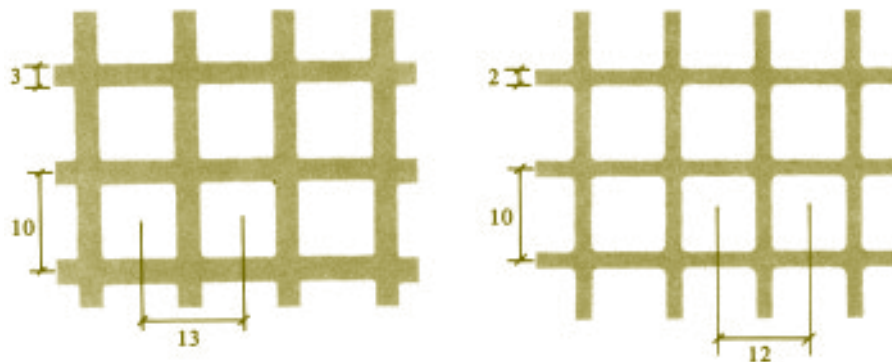


Exercícios

1. Calcule p escolhendo como pedaço representativo da chapa um daqueles apresentados no texto.
2. Tente conceituar melhor o que é um pedaço representativo da chapa. Pense em transformações (simetrias, translações).

A distância entre os centros dos furos

Observe as duas chapas seguintes. Em ambas, os furos quadrados têm lado de 10 mm. Na primeira o espaçamento entre os quadrados é de 3 mm e na segunda é de 2 mm. Uma forma cômoda de caracterizar este maior ou menor afastamento entre os furos é através da distância entre seus centros.



No primeiro caso esta distância é de 13 mm, e no segundo, de 12mm.

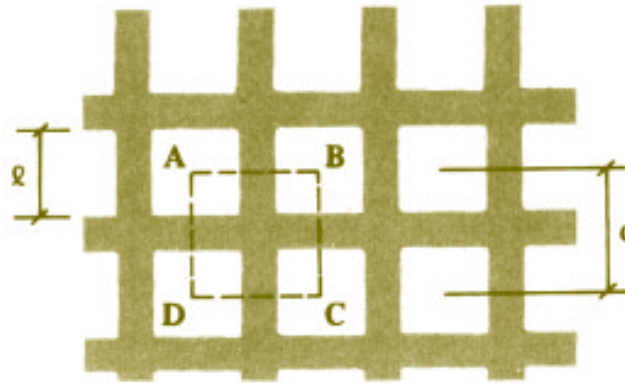
Esta é a linguagem usada pelos técnicos que trabalham nesta área: a chapa fica definida por sua espessura, pelo tipo de furo (quadrado, circular, retangular etc.), pela disposição dos furos, pelo tamanho dos furos, pela distância entre seus centros, e pelo material de que é feita a chapa (ferro, cobre, alumínio etc.).

A necessidade de resultados gerais

Às pessoas que trabalham neste ramo interessa a existência de resultados gerais que permitam o cálculo da porcentagem p com rapidez. Por esta razão, o catálogo a que me referi está repleto de fórmulas e tabelas. Cada uma destas fórmulas se refere a um tipo de furo: quadrado, retangular, circular, etc. Vejamos algumas delas e a sua justificativa. É evidente que no catálogo não consta esta justificativa. Seus objetivos são outros.

A chapa de furos quadrados

Vamos indicar com l o lado do furo quadrado e com c a distância entre os centros dos furos. Vamos raciocinar sobre o quadrado $ABCD$: seu lado é c , sua área é c^2 . A área perfurada corresponde aos quatro quadradinhos de lado $l/2$, que juntos formam um quadrado de lado l . Logo a área perfurada é l^2 .

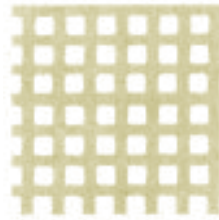


Portanto a porcentagem p de área perfurada é:

$$p = \frac{l^2}{c^2} \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{l}{c}\right)^2$$

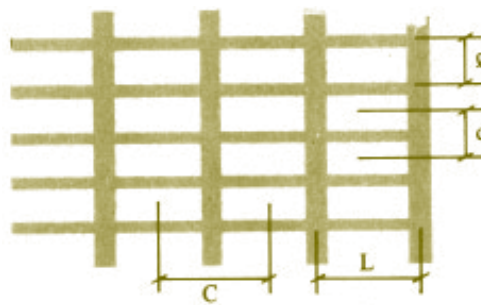
Exercício

3. Calcule p para a chapa seguinte na qual $l = 2,5 \text{ mm}$ e $c = 4 \text{ mm}$.



A chapa de furos retangulares

Na chapa de furos retangulares vamos indicar por l e L os lados do retângulo. Seja c a distância vertical entre centros, e C a distância horizontal entre eles.



O restante deixo de presente para você: prove que a porcentagem p de área perfurada é dada por

$$p = \frac{l \times L}{c \times C}.$$

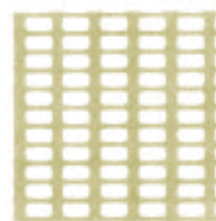
Exercícios

4. Calcule a porcentagem de área perfurada da chapa seguinte, onde:

$$l = 1,6 \text{ mm},$$

$$L = 3,6 \text{ mm},$$

$$c = 2,4 \text{ mm}, \text{ e } C = 5 \text{ mm}.$$



5. Mostre que a fórmula $p = \left(\frac{l}{c}\right)^2$,

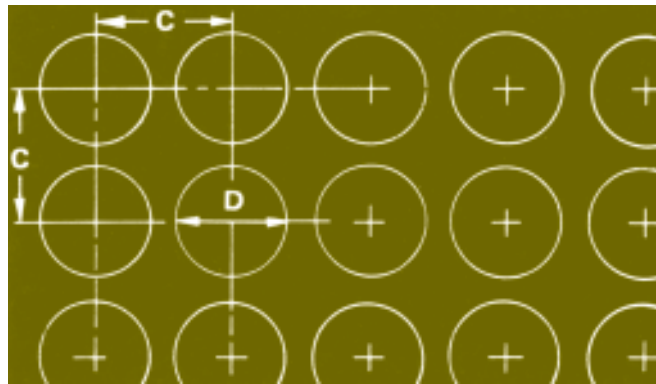
referente às chapas de furos quadrados, é caso particular da fórmula

$$p = \frac{l \times L}{c \times C}.$$

referente às chapas de furos retangulares.

A chapa de furos circulares em disposição reta

Na chapa da figura, seja d o diâmetro dos furos circulares e c a distância entre seus centros.



Raciocinemos no quadrado $ABCD$. Seu lado é c , logo sua área é c^2 . A parte furada corresponde aos quatro quartos de círculo de diâmetro d , logo a área da parte perfurada é

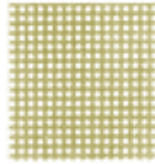
$$\frac{\pi d^2}{4}.$$

Portanto:

$$p = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{c^2} \text{ ou } p = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

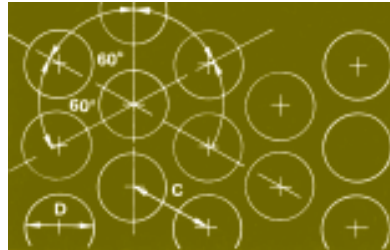
Exercício

6. Calcule p para a chapa seguinte, onde $d = 1$ mm e $c = 1,6$ mm.



A chapa de furos circulares em disposição hexagonal

Nesta disposição os centros dos seis furos que circundam um furo qualquer são vértices de um hexágono regular. Perceba que este hexágono é um pedaço representativo da chapa toda.



O lado do hexágono destacado na figura é c . Pensando o hexágono como justaposição de seis triângulos equiláteros de lado c , sua área é:

$$6 \times \frac{c^2 \sqrt{3}}{4}.$$

A parte furada, interior a este hexágono, é constituída de um círculo no centro e mais seis terços de círculo, portanto, ao todo são três círculos de diâmetro d . Logo a área perfurada é

$$3 \times \frac{\pi d^2}{4}.$$

Portanto:

$$p = \frac{\frac{3\pi d^2}{4}}{\frac{6c^2 \sqrt{3}}{4}} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \left(\frac{d}{c} \right)^2.$$

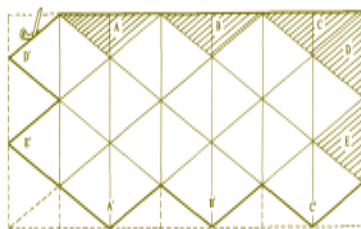
Exercício

7. Calcule p para a chapa seguinte, onde $d = 4$ mm e $c = 6$ mm.



A chapa de furos oblongos

A forma oblonga dos furos, a que se refere o catálogo, é a reunião de um retângulo com dois semi-círculos. O significado de l , L , c e C está indicado na figura:



Agora prove que:
$$p = \frac{4Ll + (n-4)l^2}{4Cc}$$

Novos problemas

E agora você pode inventar problemas, pensando em furos em forma de losango, hexágono regular, triângulos equiláteros, elipses etc.

Além de jogar com a forma dos furos, você pode variar ainda a sua disposição, como fizemos com os furos circulares.

Vamos lá, aceite o desafio!

Encerramento

Para encerrar, duas palavrinhas.

Os conceitos envolvidos nestes problemas são acessíveis a alunos de 8ª série do ensino fundamental: cálculo de áreas e porcentagens. Convido os

colegas que atuam neste nível de ensino a levá-los para suas aulas de Geometria quando estiverem calculando áreas. Aposto que algum aluno aparecerá em sala com um pedaço destas chapas, e que a aula de Matemática dará mais prazer a todos.

Agora a segunda palavrinha. O catálogo industrial, no qual aprendi estas coisas que estão neste artigo, me foi presenteado por meu tio Eugênio, que durante longos anos de sua vida trabalhou em indústrias metalúrgicas. Sempre fazendo de tudo nelas, mas sempre usando Matemática na sua profissão. Ao se aposentar entregou-me seus livros, revistas, catálogos e apontamentos, dos quais se pode retirar muito material para artigos deste tipo, mostrando como a Matemática é importante na vida das pessoas. Ao tio Eugênio, meu muito obrigado.

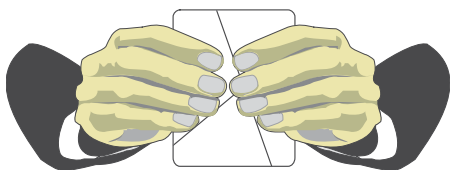
Origami e

geometria

José de Oliveira Siqueira

As dobraduras permitem um trabalho lúdico com bonitos resultados visuais e são aqui utilizadas para comprovar resultados de Geometria Plana e para construções geométricas.

É possível trabalhar perímetros, semelhança de triângulos e proporcionalidade.



Introdução

Todos nós, sem dúvida, já fizemos um barco, um chapéu ou um avião de papel. Esta arte tem um nome: *origami*. Origami é uma palavra de origem japonesa, que significa “dobrar papel”. Desde 1876 esta arte faz parte do currículo escolar japonês, e no Brasil, aos poucos, ela vai se introduzindo no ensino.

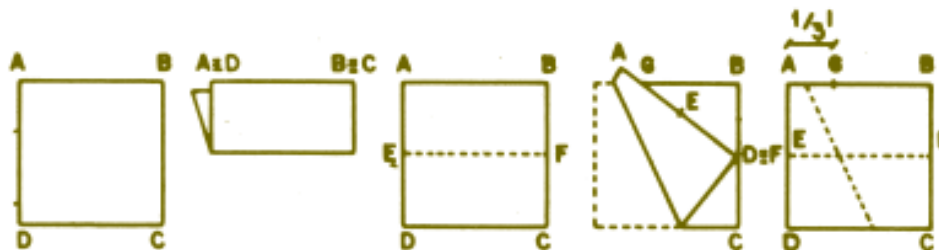
O origami pode servir como um simples passatempo nos momentos de lazer; pode ainda ser utilizado como um recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade e da habilidade manual de crianças.

Para nós, professores de Matemática, o origami oferece um farto material para descobertas teóricas. É evidente que a teoria surge da observação de fatos e da colocação de problemas. Um dos problemas práticos do origami é dobrar um quadrado em um número ímpar de retângulos congruentes. Você já tentou dobrar um quadrado de papel em 3 retângulos exatamente iguais? Parece fácil. Mas não é. Este artigo tem como objetivo resolver este problema particular e também generalizar o resultado para que se possa dobrar um quadrado em um número qualquer de retângulos congruentes.

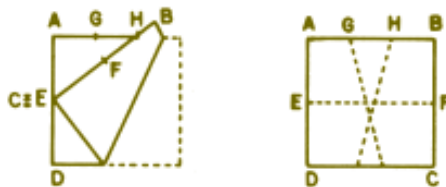
Problema 1

Dividir um quadrado de papel em 3 retângulos congruentes, usando dobras de papel.

- dobre o papel, fazendo A coincidir com D , e B coincidir com C . Desta forma ficam determinados E e F , pontos médios de AD e BC ;
- abra o papel, e agora faça D coincidir com F . Assim construímos um triângulo retângulo com um cateto CF , e a soma do outro cateto com a hipotenusa igual ao comprimento do lado do quadrado;
- chame de G o ponto de AB , que coincide com um ponto de AD na nova posição.

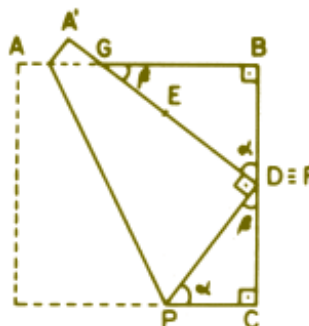


Fazendo o mesmo para o segmento DC , podemos obter o ponto H :



Os pontos G e H assim obtidos dividem o lado AB em três segmentos congruentes.

Demonstração:



Os triângulos DGB e PDC são semelhantes. Portanto,

$$\frac{BD}{PC} = \frac{GB}{DC}.$$

Como

$$DC = BD = \frac{l}{2},$$

então

$$GB \times PC = \frac{l^2}{4}.$$

No ΔPDC , por Pitágoras, temos $(PD)^2 = (PC)^2 + (DC)^2$. Como $PC + PD = l$,

$$(PC)^2 = (l - PC)^2 - \frac{l^2}{4}.$$

Portanto, temos $PC = \frac{3l}{8}$, $GB = \frac{2l}{3}$ e $AG = \frac{l}{3}$.

Problema 2

Dividir um quadrado de papel em 5 retângulos congruentes usando dobras de papel.

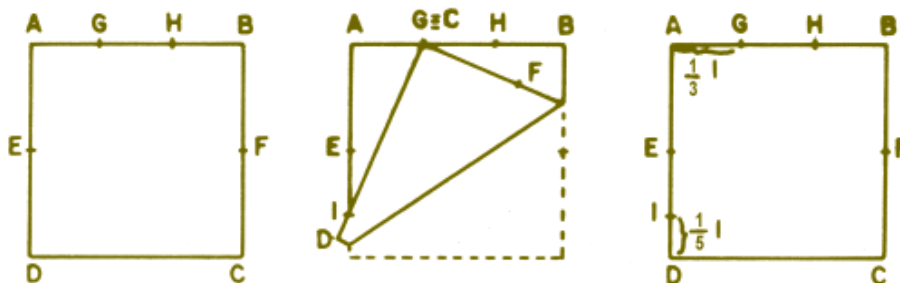


Figura 3 : $ID = \frac{l}{5}$

Deixamos a prova deste resultado por conta do leitor.

Problema 3

Dividir um quadrado de papel em 7 retângulos congruentes, usando dobras de papel.

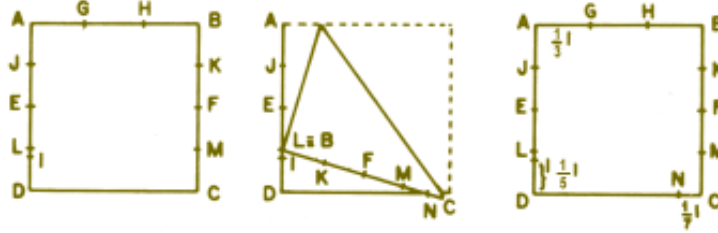


Figura 4: $NC = \frac{l}{7}$

J, K, L, M são pontos médios, respectivamente, de AE, BF, ED, FC .

Pedimos ao leitor, novamente, que demonstre este resultado.

Informamos aos leitores interessados que é possível demonstrar um resultado geral que engloba todos os casos considerados: Sejam $ABCD$ um quadrado e E o AB tal que

$$AE = \frac{m}{m+n}l \quad \text{e} \quad EB = \frac{n}{m+n}l,$$

com m e n naturais não nulos. Se dobrarmos o quadrado de modo que os pontos E e C coincidam, então,

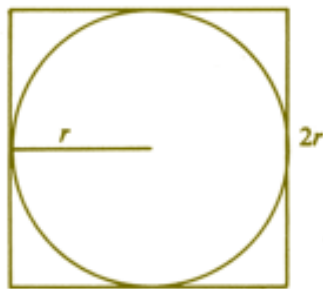
$$FD = \frac{m}{2m+n}l,$$

sendo F o ponto de encontro de AD e ED' , onde D' indica nova posição de D .

$3\pi r$, $2\pi r$ ou $4\pi r$?

Luiz Márcio Imenes

Um problema prático da compra de uma mesa, nesta atividade, suscita a pergunta: Quantas pessoas cabem numa mesa redonda? Para respondê-la, trabalha-se tópicos de geometria, como a área de um quadrado inscrito numa circunferência, comprimentos de arcos, etc



Fernando foi meu aluno em 1973. Encontramos outro dia, no casamento de um amigo comum. Falávamos da vida, quando ele me contou esta história.

Na época em que montava seu apartamento, ele decidiu comprar uma mesa de tampo redondo. A que havia na loja era muito grande, mas o vendedor lhe informou que no depósito havia outra com 1,10 m de diâmetro. Com receio de que esta, por sua vez, fosse pequena demais, ele pensou em fazer alguns cálculos. Será que na volta desta mesa caberiam, pelo menos, umas 6 pessoas?

Lembrou-se que na fórmula a ser usada aparecia o número π multiplicado pelo raio do círculo, mas não sabia se era $3\pi r$, $2\pi r$ ou $4\pi r$. Foi então que lhe ocorreu uma idéia. O quadrado circunscrito ao círculo de raio r tem lado $2r$ e perímetro $8r$. No caso do círculo de 1,10 m de diâmetro este perímetro é igual a 4,40 m.

O lado do quadrado inscrito no círculo ele calculou com o teorema de Pitágoras (que não havia esquecido):

$$l^2 = r^2 + r^2$$

ou

$$l = r\sqrt{2}.$$

Portanto, o perímetro do quadrado inscrito é igual a

$$4r\sqrt{2} = 2,20\sqrt{2} \cong 3,11 \text{ m.}$$

A seguir, ele calculou a média aritmética destes dois perímetros:

$$\frac{4,40 + 3,11}{2} \cong 3,75 \text{ m.}$$

Deste modo, obteve o perímetro aproximado (3,75 m) da mesa circular de diâmetro 1,10 m. Estimando cerca de 60 cm para cada pessoa, ele concluiu que caberiam 6 pessoas à volta da mesa.

Fernando sabia que a média aritmética dos perímetros dos quadrados poderia não ser igual ao perímetro do círculo. Mas, para o que desejava, esta era uma aproximação razoável.

Apenas como curiosidade, vejamos qual é o erro relativo desta aproximação.

Temos:

$$p = \text{perímetro do círculo} = 2\pi r$$

$$m = \text{média aritmética dos perímetros dos quadrados} =$$

$$\frac{8r + 4\sqrt{2}}{2} = 4r + 2r\sqrt{2}$$

$$\text{erro relativo} = \frac{(4r + 2r\sqrt{2}) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{2 + \sqrt{2} - \pi}{\pi} \cong 0,09 = 9\%.$$

Sem dúvida, o bom senso de Fernando funcionou bem!

Por que o parafuso é sextavado?

Luiz Márcio Imenes

José Jakubovic

Nesta atividade os autores usam parafusos e chaves de fenda, presentes na realidade dos alunos, para estudar ângulos internos de polígonos.

É discutida a forma da cabeça de um parafuso que permite melhor funcionalidade sob diferentes aspectos. Pode-se pedir aos alunos que tragam parafusos encontrados em casa para concretizar e enriquecer a atividade.

Você já deve ter visto parafusos destes tipos:



O mais comum é o primeiro, chamado pelos mecânicos de sextavado. Repare que sua cabeça (onde se encaixa a chave para apertá-lo ou desapertá-lo) é um poliedro: trata-se de um prisma regular hexagonal.

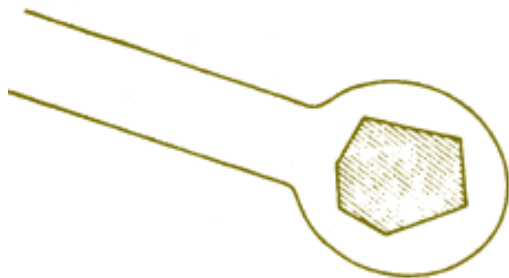
Certa vez vimos um parafuso especial de uma máquina, cuja cabeça era um prisma regular triangular:

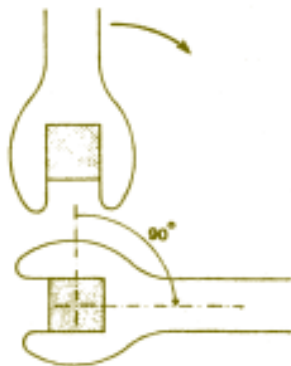


Por que não existem (pelo menos nunca vimos) parafusos pentagonais ou octogonais?

Em todos estes tipos de parafusos o polígono presente é sempre regular, e é fácil perceber a razão disto. Seria inconveniente apertar e desapertar um parafuso em cuja cabeça figurasse um polígono não regular. A chave precisaria ser especial para aquele parafuso e ela voltaria a se encaixar na cabeça do mesmo, somente após uma rotação de 360° .

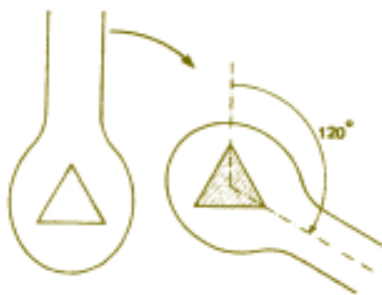
Se o polígono da cabeça do parafuso é um quadrado, após uma rotação de 90° , o parafuso volta à posição original, podendo-se encaixar outra vez a chave para um novo giro.





Deste modo, com quatro giros de 90° , a rosca dá um passo.

No caso do parafuso triangular são necessários três giros de 120° para completar uma volta na rosca.



Com o parafuso sextavado completamos um passo da rosca após seis giros de 60° cada um.



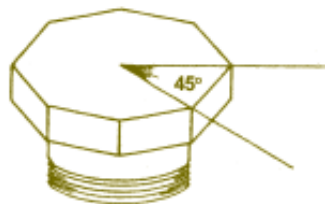
Quando um mecânico está concertando um defeito qualquer numa máquina – por exemplo, um automóvel – muitas vezes ele tem pouco espaço para trabalhar (em geral em posições desconfortáveis). Por esta razão, dos três parafusos apresentados, o mais cômodo é o hexagonal, pois é o que pode ser apertado ou desapertado com giros menores (60°), isto é, com movimentos mais curtos do braço.

Observe que este ângulo de giro a que estamos nos referindo é o ângulo central do polígono regular.



A medida do ângulo central do polígono regular de n lados é: $\frac{360^\circ}{n}$

e, se é conveniente que o ângulo central do polígono seja “pequeno” nos parafusos, por que não usar polígonos com maior número de lados? Um octógono, por exemplo? Neste caso, o ângulo de giro seria de apenas 45°.



Sem dúvida, sob este aspecto, o octógono é mais conveniente que o hexágono. Entretanto há outros fatores que pesam no projeto de um parafuso.

Um octógono regular está mais próximo do círculo que o hexágono regular

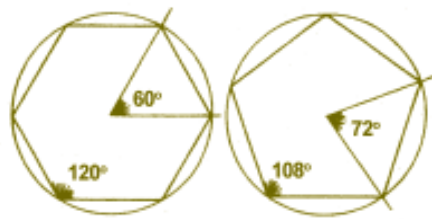


O ângulo interno do hexágono regular mede 120°, e o do octógono regular, 135°. A chave usada para apertar ou desapertar um parafuso nunca se ajusta perfeitamente à sua cabeça. Sempre existe uma folguinha. Com o uso, a tendência da cabeça é sofrer um arredondamento (dizemos que a cabeça do

parafuso fica espanada). Sob este aspecto o polígono mais adequado é o triângulo (é o que mais se afasta do círculo, é o que tem o menor ângulo interno: 60°).

Perceba que, numa linguagem pouco precisa, mas muito significativa, o hexágono fica mais ou menos no meio termo quando consideramos estes dois fatores: giro pequeno e dificuldade para o espaçamento.

Mas por que não um parafuso pentagonal? O pentágono é próximo do hexágono. Sob aqueles dois aspectos apresentados, o pentágono possui propriedades próximas das do hexágono.

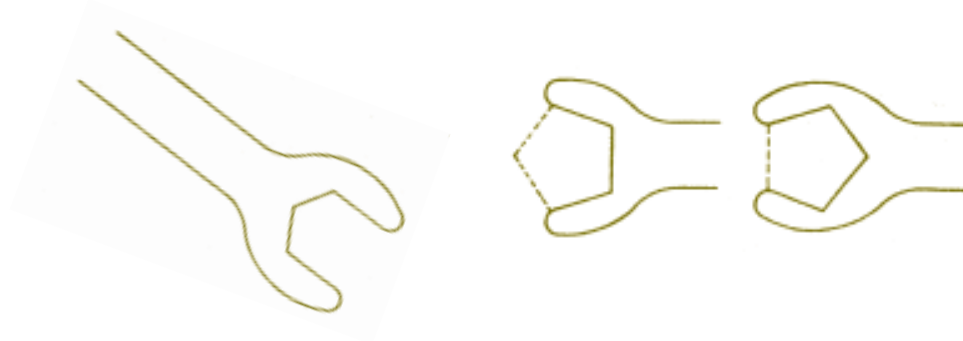


Para compreender porque não existem parafusos pentagonais, é preciso considerar outro aspecto. No hexágono regular existem lados opostos paralelos, e o mesmo não ocorre no pentágono regular.

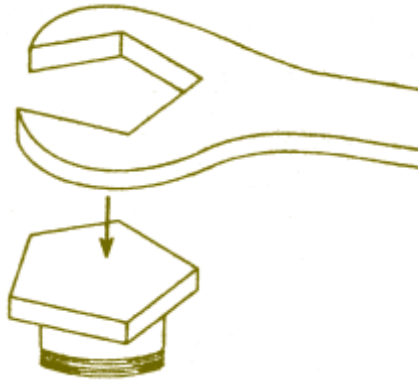


Isto significa que a chave usada para o parafuso hexagonal tem, no encaixe, bordos paralelos, o que facilita o ajuste da chave à cabeça do parafuso.

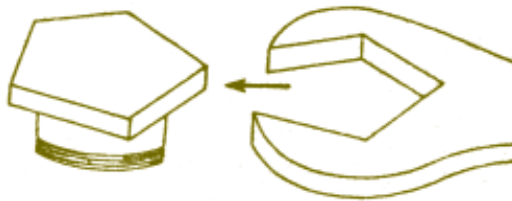
Para parafusos pentagonais poderíamos ter dois tipos de chaves.



A primeira tem a desvantagem de “escapar” com facilidade e a segunda só se encaixaria na cabeça do parafuso com este movimento:



e não com este:



o que é incômodo para o mecânico. A primeira das chaves pentagonais não apresenta esta desvantagem, mas como dissemos, “escapa” com mais facilidade da cabeça do parafuso.

Em resumo, no projeto de parafusos com cabeças prismáticas, o polígono regular da base deve ser escolhido levando-se em conta:

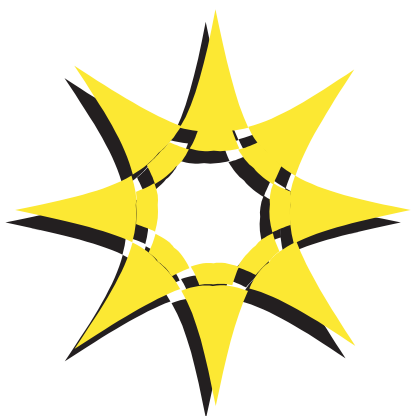
1. seu ângulo central (giro pequeno);
2. seu ângulo interno (espanamento da cabeça);
3. existência de lados paralelos (encaixe da chave).

Estes critérios fazem do hexágono regular (parafuso sextavado) o polígono mais adequado.

Um problema: resolução & exploração

Lilian Nasser

Geometria mais prontidão e criatividade para resolver problemas são exploradas nesta atividade que discute o uso de um pedaço retangular de vidro para obter pedaços triangulares, evitando bolhas que há no vidro.



Introdução

Muito se tem propagado nos últimos anos sobre a Resolução de Problemas como um método ideal para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O que vemos em nossas salas de aula e nos livros-texto, no entanto, são listas intermináveis de problemas, quase sempre do mesmo tipo e que podem ser resolvidos “conforme o modelo”. É claro que isto não propicia o desenvolvimento do raciocínio das crianças e, ao invés de motivá-las, cria nelas, atitudes negativas em relação à Matemática.

Na tentativa de reverter esta situação, o professor pode desenvolver o processo ensino-aprendizagem sob a forma de desafios e, em aulas especiais, propor problemas interessantes, que possam ser “explorados”, e não apenas resolvidos.

“Explorar” um problema significa procurar soluções alternativas, além da natural, e analisá-lo sob diferentes pontos de vista matemáticos. Assim, um mesmo problema pode ter uma resolução aritmética e outra algébrica ou geométrica, ou pode ser resolvido por uma estratégia (heurística), sem o uso de algoritmos ou de conhecimentos matemáticos específicos. É evidente que isso nem sempre será possível com qualquer problema e, nas primeiras séries, a “exploração” deve ser conduzida pelo professor com cuidado especial. Problemas ideais para serem “explorados” são os chamados “problemas

de processo”, ou seja, aqueles que não podem ser resolvidos apenas pelo uso de uma ou mais operações, mas requerem o uso de uma estratégia adequada.

Além disso, depois que o aluno “compreende” realmente o problema e sua(s) resolução(ões), deve ser incentivado a explorar extensões e variações do mesmo problema, sugeridas no início pelo professor e, depois, pela própria turma.

Um exemplo

Para ilustrar essa tese, vejamos como pode ser “explorado” o seguinte problema:

Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituoso, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com 2 vértices do retângulo.

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos cantos do vidro original. Quantos pedaços triangulares ele cortou?



Inicialmente, o aluno deve entender como será cortado o vidro. É claro que isso não é imediato com 10 bolhas! A estratégia a ser usada, então, pode ser:

Resolver um problema mais simples

Tentando fazer os cortes nos casos de 1 bolha, 2 bolhas, 3 bolhas,..., o aluno é levado a perceber que o número de triângulos depende do número de bolhas.

Observa-se que, para o mesmo número de bolhas, há mais de uma configuração possível. Se o número de triângulos depende apenas do número de bolhas, é preciso procurar algumas propriedades para cada caso.



1 Bolha $\Rightarrow$ 4 triângulos



2 bolhas $\Rightarrow$ 6 triângulos



3 bolhas $\Rightarrow$? triângulos

Por exemplo, com 2 bolhas, temos:

- Δ cada bolha é vértice de 4 triângulos. Será que em todas as configurações isso acontece? Tente outras configurações para verificar.
- Δ cada bolha é vértice de, no mínimo, quantos triângulos? E no máximo?
- Δ cada canto do vidro original é vértice de quantos triângulos?

Tente relacionar algumas perguntas semelhantes para o caso de 3 bolhas. Depois disso, a estratégia pode continuar da forma seguinte:

Procurar uma lei de formação e generalizar

Dependendo do nível dos alunos, eles percebem que uma bolha adicional gera a transformação de um triângulo em 3 novos triângulos, isto é, são criados mais dois triângulos.

A partir disso, a lei de formação pode ser encontrada através da

Construção de uma tabela:

Número de bolhas	Número de triângulos
1	4
2	6
3	8
4	10
.	.
.	.
.	.
n	$2n + 2$
10	22

Concluimos, então, que a lei de formação é $2n + 2$, e a resposta do problema é: 22 pedaços triangulares.

Solução geométrica (a partir da 7ª série)

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , e o número de triângulos independe da maneira como se decompõe o vidro, a soma S das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos é 180° vezes o número de triângulos.

Por outro lado,

$S = [\text{soma das medidas dos ângulos em torno de cada bolha}] + [\text{soma das medidas dos 4 ângulos retos dos vértices do vidro retangular}]$

$$S = 360^\circ \times 10 + 90^\circ \times 4 = 3960^\circ$$

Logo, o número de triângulos será: $3960/180 = 22$.

Forma geral com n bolhas:

$$\frac{360^\circ \cdot n + 90^\circ \cdot 4}{180^\circ} = 2n + 2.$$

Exploreemos, agora, algumas extensões do problema:

- 1) Resolva o mesmo problema com um vidro triangular.
- 2) Resolva o mesmo problema com um vidro em forma de pentágono.
- 3) Com n bolhas, considere o vidro original em forma de m -ágono. Você é capaz de obter uma regra geral para o número de triângulos obtidos? (Tente a solução geométrica. A resposta é $2n + m - 2$.)
- 4) A resposta do problema seria diferente se o vidro original tivesse a forma de um quadrilátero não regular?
- 5) Que aconteceria se, no lugar de triângulos, quiséssemos cortar o vidro em forma de m -ângulos?

Observação final

Para que o professor possa levar seus alunos a “explorar” os problemas, ele deve ter sempre, e não só durante a atividade de resolução de problemas, atitudes que criem neles espírito crítico e inovador. Exemplos de tais atitudes são:

- dar chance aos alunos de tentar estratégias de solução por si próprios;
- aproveitar as idéias dos alunos, mesmo que não levem à resposta certa (não usar apenas o certo ou errado como parâmetros de correção);
- deixar que eles criem perguntas, visando à compreensão do problema (ao invés de receber respostas prontas para perguntas que não fizeram);
- não mostrar soluções prontas e arrumadas, mas deixar que eles sintam todo o raciocínio desenvolvido até chegar a elas.

A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga

Geraldo Ávila

Qual é o mais distante: o Sol ou a Lua? Quais os tamanhos da Terra, Sol e Lua? A busca das respostas à essas perguntas intrigantes motivam o estudo de ângulo, proporções ou relações no triângulo retângulo.

Além disso, esta atividade privilegia a interdisciplinaridade, discutindo o ciclo lunar, eclipses, movimentos da Lua e da Terra etc. sempre dentro do contexto histórico dos cálculos feitos por Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu.

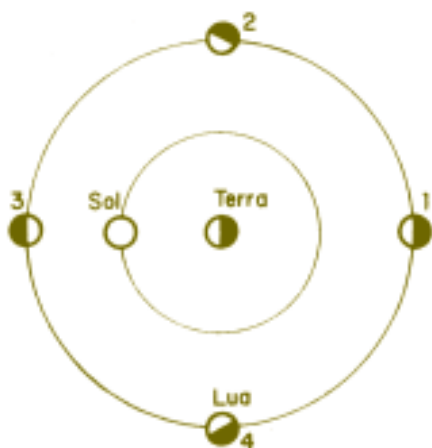
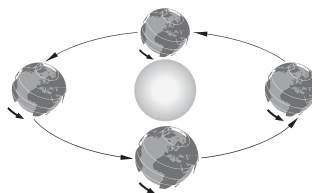


Figura 1

Os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, séculos antes de Cristo; mas poucas pessoas sabem como eram feitos esses cálculos. Eles se baseiam em idéias que são muito simples e geniais, ao mesmo tempo em que estão intimamente ligadas a noções fundamentais de Geometria – como semelhança de triângulo e proporcionalidade –, servindo, pois, como excelente motivação ao estudo dessa disciplina. Por isto mesmo essas questões devem ser divulgadas, já que elas ainda não aparecem nos livros de ensino fundamental e médio.

Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?

Para constatar que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, basta observar atentamente as várias fases da Lua. Se ela estivesse mais longe de nós que o Sol, então, por simples análise de suas várias posições relativamente ao Sol e à Terra (a Figura 1 ilustra quatro dessas posições), concluiríamos que ela estaria sempre iluminada pelo Sol quando vista da Terra. Em particular, não haveria lua nova! E haveria duas posições da Lua, em 1 e em 3, onde ela seria lua cheia – esta última em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente. A hipótese contrária, de que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, é a única compatível com as várias fases da Lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar esta hipótese é a ocorrência de eclipses do Sol, que só são possíveis com a Lua mais próxima da Terra que o Sol.



Quão mais distante?

A idéia de Aristarco

Para descobrir quão mais distante que a Lua se encontra o Sol, devemos aprofundar um pouco mais nossa observação do ciclo lunar. O que vamos descrever agora é o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III a.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Existem duas posições da Lua em sua órbita, o “quarto crescente” e o “quarto minguante”, quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Figura 2). Quando isso acontece, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ (Figura 3) é muito próximo de 90° , indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua. Esse fato é facilmente notado ao nascer e ao pôr do Sol, evidentemente com a Lua em quarto crescente ou quarto minguante (meia-lua), como ilustra a Figura 3. Aristarco teria medido esse ângulo α , encontrando para ele o valor de 87° . Então, o ângulo $\beta = \widehat{LST}$ seria de 3° . Basta agora construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar o valor da razão TS/TL , que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol é cerca de vinte vezes a distancia da Terra à Lua.

Voltemos a considerar o problema de medir o ângulo α (Figura 2). Na verdade é mais fácil calcular esse ângulo do que medi-lo diretamente. Basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo de passagem de minguante a crescente; com estes dados uma proporção simples resolve o problema. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante a crescente durava 14,25 dias, um dia menos que a passagem de crescente a minguante. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, os ângulos descritos pelo seu raio vetor são proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. Então, com referencia à Figura 2, podemos escrever

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25},$$

donde podemos $\alpha = 86,57^\circ$, portanto,

$$\frac{TS}{TL} = \sec \alpha = \sec 86,95^\circ \cong 18,8,$$

logo $TS = 18,8 TL$.



Figura 2

É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois sabemos hoje que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Em consequência, o ângulo α está próximo a $89,86^\circ$, portanto muito perto de 90° ! Os raios solares que se dirigem à Terra à Lua são praticamente paralelos. Isto põe o problema de explicar como Aristarco teria chegado ao cálculo de α . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época.

Tamanhos do Sol e da Terra

Aristarco observou que o Sol e a Lua têm o mesmo “tamanho angular”. Em outras palavras, o ângulo 2α , sob o qual um observador terrestre vê o Sol, é o mesmo sob o qual ele vê a Lua (Figura 4). Esse fato, aliás, é comprovado pela observação de um eclipse total do Sol. Realmente, quando ocorre tal eclipse, o disco lunar coincide com o disco solar, encobrindo-o por inteiro.

Aristarco estimou o ângulo 2α da Figura 4 como sendo 2° ; na verdade ele é de cerca de apenas $0,5^\circ$. Mas isto, como o leitor deve notar, não prejudica o resultado que obteremos a seguir, baseado na semelhança dos triângulos TLL' e TSS' . Esta semelhança nos permite escrever

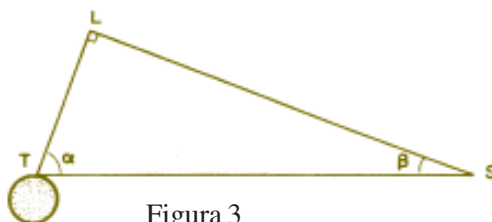


Figura 3

isto é, os raios do Sol e da Lua estão entre si como as distancias TS e TL , respectivamente. Mas, pelo que vimos anteriormente,

$$\frac{TS}{TL} \cong 20.$$

de sorte que $SS' \cong 20 LL'$, segundo Aristarco, ou seja, o raio do Sol é aproximadamente vinte vezes o raio da Lua.

Tendo em vista referências futuras, vamos resumir aqui resultados já obtidos. Sejam $D_s = TS$ (Figura 4) a distância da terra ao Sol, $D_L = TL$ a distância da Terra à Lua, $R_s = SS'$ o raio do Sol, e $R_L = LL'$ o raio da Lua. Então:

$$\frac{R_s}{D_s} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{D_s}{D_L} = b,$$

onde, para Aristarco, $a \cong 1^\circ$ e $b \cong 20$, quando, na realidade, $a \cong 0,25^\circ$ e $b \cong 400$.

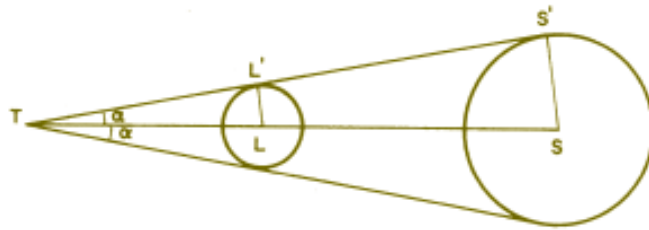


Figura 4.

Relações com o raio da Terra

Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua a raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da terra (Figura 5). Pelo tempo gasto nessa travessia, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era $8/3$ do diâmetro da Lua.

Na Figura 6, L , T , S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_s$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra da altura da Lua, de sorte que $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$



Figura 5

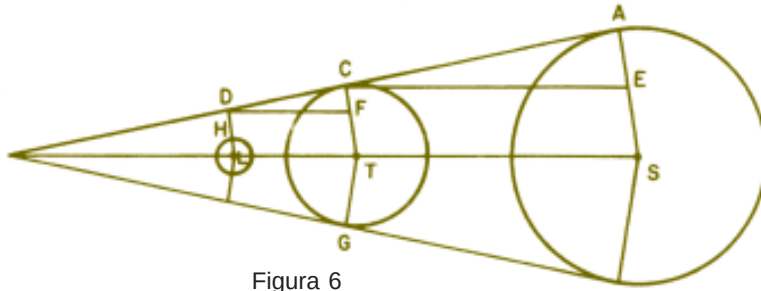


Figura 6

Mas

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3; DF = D_L;$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T; CE = D_S.$$

Substituindo estes valores na igualdade anterior,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_S = bD_L, R_S = aD_S = abD_L, R_L = ad_L,$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{-\frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

Daqui segue-se que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \left(\frac{8}{3} + 1\right)aD_L,$$

ou ainda

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}.$$

Então,

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a},$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}$$

$$\text{e } R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}.$$

Deste modo, substituindo $a = \operatorname{tg} 1^\circ \cong 0,017$ e $b \cong 20$, podemos obter as quatro grandezas, D_L , D_S , R_S , e R_L , em termos do raio da Terra R_T , com os dados de Aristarco:

$$D_L \cong 16,8 R_T, D_S \cong 337 R_T,$$

$$R_S \cong 5,7 R_T, R_L \cong 0,29 R_T.$$

Ao contrário, com os valores mais corretos — $a = \operatorname{tg} 1/4^\circ \cong 0,0044$ e $b = 400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \cong 62 R_T, D_S \cong 24855 R_T,$$

$$R_S \cong 109 R_T \text{ e } R_L \cong 0,27 R_T,$$

Os cálculos que vimos descrevendo encontram-se num livro de Aristarco, intitulado *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*. Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência, Thomas Heath.

Eratóstenes e o raio da Terra

Pelo que vimos até agora, basta saber o raio da Terra para podermos calcular os tamanhos e as distâncias a que se encontram o Sol e a Lua.

Foi Eratóstenes (276-196 a.C.), outro sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno, para nós, habitantes do hemisfério Sul), os raios solares caíam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caíam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de $7,2^\circ$ com a vertical (Figura 7), ou seja, $1/50$ da circunferência completa, que é de 360° . Como os raios solares são praticamente paralelos, isso significa que o ângulo central $\widehat{ACS}$ também mede $7,2^\circ$. Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos,

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ}$$

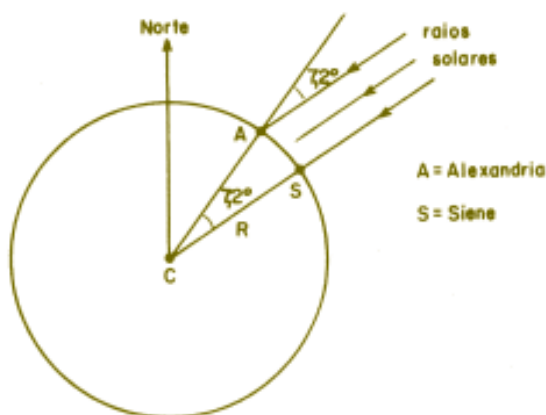


Figura 7

onde R é o raio da Terra. Como a distância $\widehat{AS}$ de Alexandria a Siene era conhecida e igual a 45 000 estádios, podemos calcular a circunferência terrestre:

$$2\pi R = 5000 \times \frac{360}{7,2} \cong$$

$$250000 \text{ estádio} \cong 46300 \text{ km}$$

$$R \cong \frac{250000 \times 185}{6,28} \cong 7365 \text{ km.}$$

O valor atual, no equador, é de 6378 km, mostrando que o resultado de Eratóstenes é bastante razoável.

Ptolomeu e a distância da Terra à Lua

Cláudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, o *Almagesto*, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos muitos fatos citados nesse livro, dentre eles vários eclipses, infere-se que Ptolomeu teria vivido por volta do ano 150 de nossa era.

Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua. Para isso imaginemos que um observador em A (Figura 8) veja a Lua na posição L , sobre a vertical de A . Depois de um certo tempo t , o observador passa da posição A à posição A' , devido ao movimento de rotação da Terra. Ao mesmo tempo a Lua passará à posição L' . Como os ângulos $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{ACL'}$ são conhecidos (pois os movimentos da Terra e da Lua são conhecidos), também é conhecido o ângulo $\gamma = \widehat{ACA'} - \widehat{ACL'}$. O ângulo α é medido diretamente, o que permite conhecer seu suplementar β . Assim, o triângulo $CA'L'$ fica completamente determinado pelo lado $CA' = R$ (raio da Terra) e os ângulos β e γ . Portanto, a distância CL' da Terra à Lua pode ser determinada em termos de R .

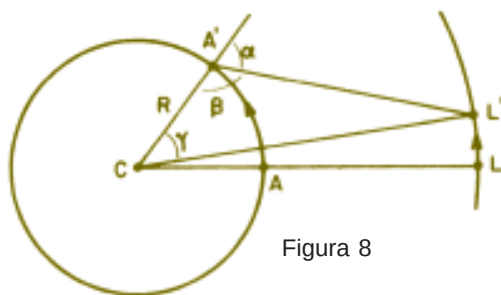


Figura 8

O lado romântico

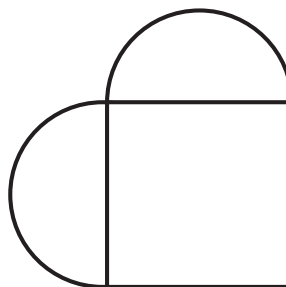
da Geometria

Hideo Kumayama

A construção de caixas em formato de coração utiliza o comprimento da circunferência e a comparação de medidas.

No ano letivo de 2001, nas turmas de 8ª série, valendo-me da proximidade do dia das mães, resolvi propor a seguinte atividade:

Numa folha de papel cartão/cartolina, construir dois semicírculos com o diâmetro nos dois lados consecutivos de um quadrado e recortar.



Os alunos ficaram perplexos com o resultado!

“Coração, professor!” Afirmaram.

Assim, eles aprenderam esse novo modo de construir um coração! Uns dobraram uma folha ao meio e construíram cartões com formato de um coração.

Outros mais ousados queriam fazer caixas com formato de coração e perceberam que era necessário a medida do comprimento da folha para construir a parte lateral da caixa. A largura da folha determinaria a altura da caixa.

De repente, Carina, balbuciou: “Comprimento da circunferência mais dois lados do quadrado, professor!”

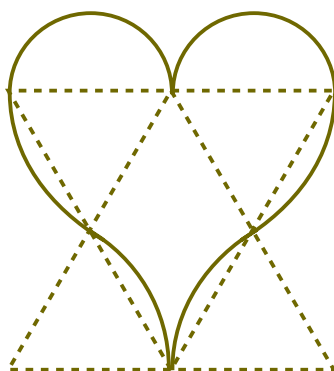
Carina fez duas caixas: numa delas partiu de um quadrado de 146 mm e noutra partiu de um quadrado de 150 mm, assim a caixa maior serviu

de tampa. Perguntei a finalidade da caixa e Carina disse que iria presentear a mãe com um CD.

Poderia ter provocado outros desdobramentos, como construir uma caixa coração para transferir os bombons de uma caixa prismática de base retangular (daquelas que normalmente encontramos nos supermercados). Essa situação envolveria cálculo de volumes.

Uma outra atividade interessante: construir dois triângulos equiláteros invertidos e concordar arcos de 60° (raio igual metade do lado) e arcos de 180° (raio quarta parte do lado)!

Poderemos investigar muita geometria nessa romântica figura.



Você sabe ler

seu relógio de luz?

Ernesto Rosa Neto

Este texto e o próximo permitem uma atividade que traz para a sala de aula as “contas de luz e água”, que fazem parte do nosso cotidiano, mas são, na verdade, um grande enigma para a maioria da população.

A compreensão da leitura do relógio de luz está intimamente ligada à compreensão do sistema posicional. O trabalho aqui proposto pode ser desenvolvido em sala de aula desde a 5ª série. Para esta atividade sugere-se que o professor peça aos alunos que façam e tragam para a escola a leitura dos relógios de luz e contas de água de suas casas.

Com o racionamento de energia, para evitar uma multa injusta, precisei entrar em contato com a prestadora de serviço, que me pediu a leitura do relógio, que se apresentava assim:



Liguei e passei a leitura feita para a pessoa que me atendeu: 6184.

Ela me disse que precisava saber exatamente onde estava cada ponteiro. Se o primeiro número 6 era exatamente 6 ou entre 6 e 7, mais perto de qual. Eu lhe disse que decorara os relógios e poderia dar-lhe essas respostas. Ela se admirou e perguntou onde – ficava o primeiro ponteiro. – “Fica entre o 6 e o 7, mais próximo do 6”. Numa escala de 0 a 10 fica no 1, entendeu? – “Claro, disse ela!” “E o segundo ponteiro?” – Fica entre o 1 e o 2. Numa escala de 0 a 10 fica no 8. O terceiro fica entre o 8 e o 9 e na mesma escala fica no 4. O último fica no meio, entre o 4 e o 5. – Caramba! Que memória boa o senhor tem! – É, respondi-lhe, o raciocínio é péssimo, mas tenho uma memória fotográfica fabulosa”.

A posição do último ponteiro eu *chutei*, porque representava pouco, eu não tinha um quinto algarismo para os décimos e não queria voltar ao relógio por tão pouco. Além do mais, as informações que dei não estavam rigorosas. Seria mais correto dizer que o primeiro número estava entre 6 e 7 e, numa escala de 0 a 1000, ficava no 184.

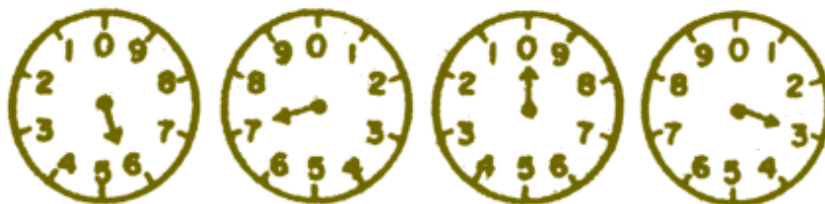
Incrível, as pessoas usam o sistema posicional todos os dias, mas não o conhecem. Como será o treinamento dos atendentes? No boleto de cobrança vem o desenho dos quatro relógios sem ponteiros, um campo para cinco dígitos e o pedido: ... *anote a posição dos ponteiros ou assinale os números...* A prática deve ter mostrado a eles que as pessoas não sabem efetuar a leitura, por isso colocaram a opção do desenho: o sintético é mais fácil que o analítico.

Como é feita sua conta de luz e água

Hideo Kumayama

Os medidores de consumo de energia elétrica, gás e água, o hodômetro de um carro, as antigas máquinas registradoras – que em muitos lugares ainda são usadas nos caixas de supermercados e casas comerciais em geral, utilizam os princípios do sistema de numeração decimal.

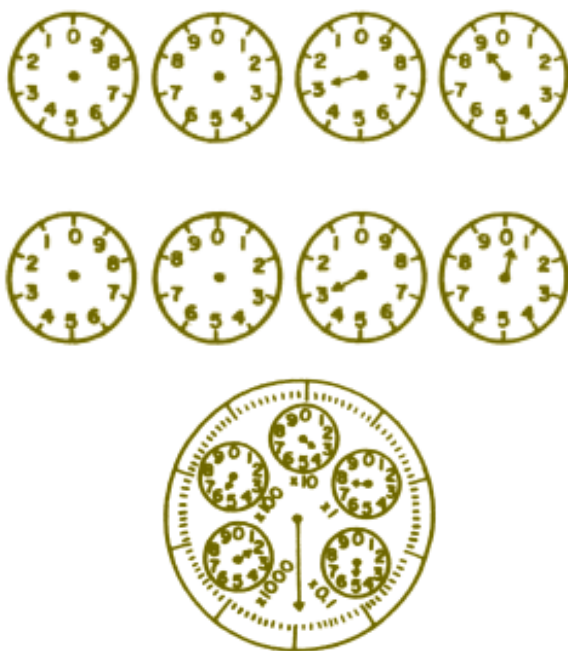
Farei aqui algumas considerações sobre a leitura dos medidores de consumo de energia elétrica.



A figura acima ilustra o esquema do mostrador de um medidor, onde o consumo é dado em *kWh* (quilowatt-hora). Esse esquema é cópia do verso de uma conta de luz: seus quatro ponteiros indicam, na ordem em que aparecem, os algarismos 5 – 7 – 0 – 3. Portanto, para fazer a leitura corretamente basta anotar, na ordem em que aparecem, um algarismo para cada ponteiro, tomando o de menor valor dentre os dois entre os quais se encontra o ponteiro (ou o 9, se o ponteiro estiver entre 0 e 9).

E preciso atenção especial quando determinado ponteiro está muito próximo do zero.

Neste caso, o ponteiro precedente também estará próximo de certo algarismo. Na, ilustração seguinte, à esquerda, por exemplo, o ponteiro da direita ou ainda não atingiu o zero – e neste caso o ponteiro precedente também não chegou no 3, e a leitura é 29 –, ou o ponteiro da direita já atingiu o zero, o da esquerda está no 3, e a leitura é 30.



A figura à esquerda ilustra um medidor de consumo de água, e a leitura é 1 537,5 m³.

Por que, no caso do medidor de energia elétrica, os sentidos de rotação dos ponteiros são alternadamente para a direita e para a esquerda? Muito simples: isso se deve ao fato de estarem ligadas entre si as engrenagens de um par de engrenagens adjacentes, de forma que elas têm de girar em sentidos contrários (veja a figura).



Por que um ponteiro à esquerda gira mais devagar ou parece mesmo estar parado, em comparação com o ponteiro logo à sua direita? A explicação aqui também é simples e é devida a um fato fundamental do sistema decimal de numeração: dez unidades fazem uma dezena, dez dezenas fazem uma centena etc. Assim, é preciso que um ponteiro dê uma volta completa para que o ponteiro logo à sua esquerda passe de um algarismo ao seguinte; em outras palavras, a velocidade de um dado ponteiro é dez vezes a velocidade do ponteiro logo à sua esquerda.

Atividade

ludo-pedagógica

Mozart Cavazza Pinto Coelho

Esta brincadeira envolve conhecimento de potência e deve ser proposta após o estudo desse conceito. Desenvolve a habilidade com números e operações aritméticas.

Instrução

Completem os espaços nas frases seguintes e, à medida que forem achando as respostas, liguem os pontos correspondentes às respostas na folha anexa. No final formará uma figura. Que FIGURA é essa?



- a) O menor número natural não nulo é ____.
- b) O sucessor par do número 13 é ____.
- c) O valor da potência 2^4 é ____.
- d) O resultado ou quociente de $\frac{121}{11}$ é ____.
- e) $\sqrt{625}$ vale ____.
- f) O valor da expressão $2^4 - 2^0$ é ____.
- g) Um número elevado ao quadrado dá 49; esse número é ____.
- h) O valor de expressão $(\frac{\sqrt{64}}{2} - 100) + 10$ é ____.
- i) O único número da seqüência: 1, 4, 9, 16, 23, 36 que não é um quadrado perfeito, é ____.
- j) Os números 2, 12, 21, 78, 1890, 1894 626 são divisíveis por dois, exceto ____.
- k) Um número n elevado ao cubo vale 64; o número n é ____.

- l) O valor da expressão $5^2 + 2$ é ____.
- m) O cubo do número 2 vale ____.
- n) O número de elementos do conjunto $M = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 3\}$ é ____.
- o) A raiz quadrada do valor da expressão $2^5 + 2(3^3 \div 9 - 1)$ é ____.
- p) A metade do valor da expressão $2^4 \div (7 \cdot 3 - 5) + (3^3 + 2^3) \div 7$ é ____.
- q) O valor da expressão $5^2 - 1$ é ____.
- r) O dobro de $\sqrt{81}$ é ____.
- s) Um número escrito na base 2 é 10 011; na base 10 vale ____.
- t) O antecessor do número 11 é ____.
- u) O dobro do sucessor do número 10 é ____.
- v) A raiz quadrada de 3^4 é ____.
- w) Se $x^3 = 1000$, então $2x =$ ____.
- x) Entre os números 14, 17, 16, 5, o único divisível por 5 é ____.
- y) O valor da expressão $20 - (6 + 4 - 7)$ é ____.
- z) Do número 2000, você subtrai 1280. A seguir, divide o resultado por 5.
A raiz quadrada do número que você obteve é igual a ____.



Nem só Álgebra, nem só Aritmética

Virgolina M.Viotto

Os problemas apresentados aqui podem ser solucionados, utilizando sistemas (duas equações lineares e duas incógnitas) ou apenas uma equação e uma incógnita (que é a solução sugerida). É interessante apresentá-los e discutir as possíveis soluções quando o aluno inicia o estudo de equações lineares. Podem ser abordados mais tarde enfatizando a idéia de que o importante não é saber a regra, mas ter entendido o raciocínio.

Este artigo se inspira na linha de que se pode ensinar Matemática, no primeiro grau, por meio de dados simples tirados de fatos da vida cotidiana, evitando que um simbolismo exagerado leve à fuga do concreto e ameace tornar as aulas enfadonhas.

Acreditamos que ao partir de situações concretas, impedimos que o aluno se escravize às operações e às regras, estimulando-o a refletir sobre um problema, e não somente sobre que operações executar para resolvê-lo.

Nessa direção, apresentamos sugestão de novo enfoque para 5 problemas que, nessa ou noutra versão, são comumente estudados em sala de aula. Tentaremos ainda mostrar, nos exemplos, como um desenho da situação descrita em um problema pode ajudar na busca da solução.

Exemplo 1

Calcular dois números, dadas sua soma e diferença.

Sabendo que para determinar o menor deles basta dividir por 2 a diferença dos números dados, o estudante poderá sair-se bem em um exame. Mas o que restará quando a regra tiver sido esquecida?

Nossa sugestão é apresentar o problema numa situação concreta:

Mário e Roberto têm juntos 45 bolinhas. Mário tem 7 bolinhas a mais do que Roberto. Quantas bolinhas tem cada um?



Pode-se encenar o problema dando a dois alunos da classe 45 objetos (bolinhas, feijões, ou o que estiver ao alcance) e pedir que eles os dividam entre si, nas condições do problema. A classe toda será convidada a participar e todas as sugestões serão analisadas. Eventualmente a classe perceberá que, dando inicialmente ao Mário as 7 bolinhas que ele possui a mais do que Roberto e, em seguida, repartindo em partes iguais as bolinhas restantes, o problema estará resolvido.

(Posteriormente, pode-se dar ao problema um tratamento mais abstrato: Se x for o número de bolinhas de Roberto,

$$x + x + 7 = 45 \Rightarrow x = \frac{45 - 7}{2} = 19$$

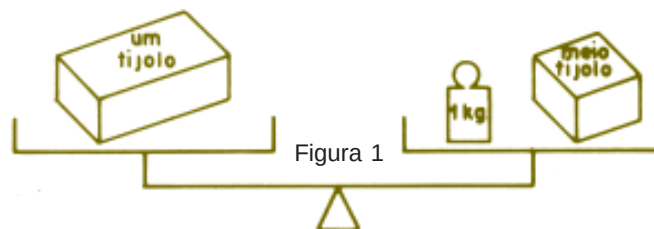
O desenho pode ser um grande auxiliar no ensino de Matemática, mesmo fora da Geometria.

Quem já não viu o problema folclórico:

Exemplo 2

Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo inteiro?

O seguinte desenho fala por si:



Se um quilo está no lugar de meio tijolo, meio tijolo pesa um quilo. Logo, o tijolo inteiro pesa 2 quilos.

(“Algebrizando”: $x = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2$).

Exemplo 3

Se Paulo comprasse revistinhas de R\$ 15,00 cada, ficaria com R\$ 10,00 sobrando. Se comprasse o mesmo número de revistinhas porém de R\$ 18,00 cada, ficariam faltando R\$ 2,00. Quantas revistinhas Paulo pretende comprar?

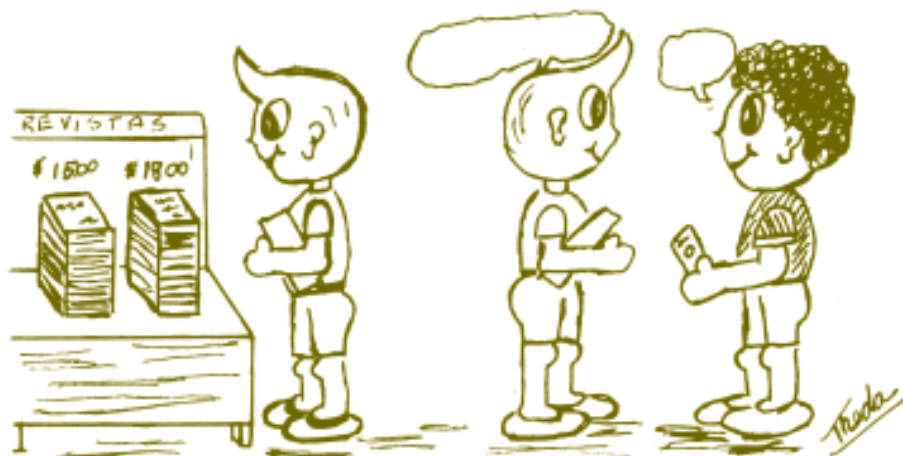


Figura 2

Para trocar as revistinhas de R\$ 15,00 por revistinhas de R\$ 18,00, Paulo terá que pagar R\$ 3,00 a mais por revistinha. Não tendo dinheiro suficiente, poderá tomar emprestados os R\$ 2,00 que faltam e efetuar a troca (Figura 2). Como tinha R\$ 10,00, tomando emprestados mais R\$ 2,00, ficará com R\$ 12,00. Quantas vezes R\$ 3,00 estiverem contidos em R\$ 12,00, são quantas revistinhas poderá comprar, isto é, 4 revistinhas de R\$ 18,00.

(“Algebrizando”: se x for o número de revistinhas,

$$x \times 15 + 10 = x \times 18 - 2 \Rightarrow x = 4).$$

Exemplo 4

Uma torneira enche um tanque em 7 horas. Outra o enche em 8 horas. Abrindo ambas ao mesmo tempo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

Se uma torneira enche o tanque em 7 horas, em uma hora encherá um sétimo do tanque. A segunda torneira, em uma hora, encherá um oitavo do tanque. As duas juntas, em uma hora, encherão

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{7+8}{56} = \frac{15}{56}$$

do tanque. Quantas vezes $15/56$ do tanque estiverem contidos na unidade (tanque) serão quantas horas levarão ambas as torneiras para encher o tanque, isto é:

Ou seja, levarão $3\frac{11}{15}$ horas, ou 3 horas e 44 minutos.

Exemplo 5

Num quintal há galinhas e coelhos, ao todo 12 cabeças e 34 pés. Quantos animais de cada espécie há no quintal?

Ao todo são 12 cabeças:



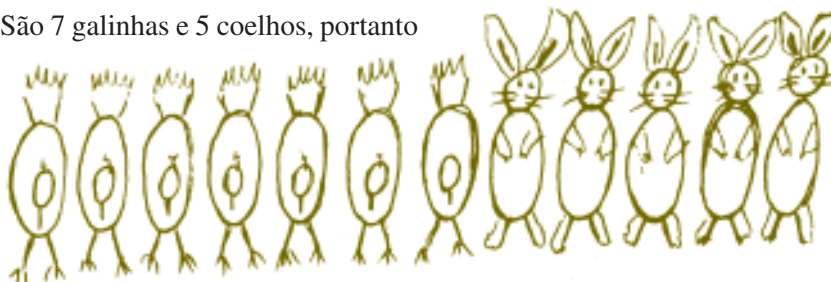
Se cada animal tivesse dois pés, teríamos, ao todo, 24 pés, ou melhor, representamos duas pernas para as galinhas e as duas pernas trazeiras dos coelhos:



Mas são 34 pés ao todo. Os 10 restantes, 2 a 2, correspondem a coelhos:



São 7 galinhas e 5 coelhos, portanto



Observação final

Durante muitos anos, no ensino fundamental, predominavam as seguintes atitudes:

- até a 5ª série, problemas eram resolvidos com o uso, apenas, da Aritmética;
- da 6ª série em diante, com a introdução da Álgebra, os problemas passavam a ser resolvidos, exclusivamente, por processos algébricos.

E nossa opinião que o raciocínio aritmético (nos exemplos, apoiado por figuras) deva continuar sendo cultivado, mesmo após a introdução da Álgebra, ou seja, nem só Álgebra, nem só Aritmética.