Números

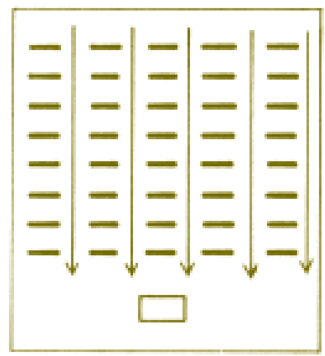
Assunto da aula "adição de números relativos"

A primeira atividade "concretiza" a noção de número negativo e a operação de adição com esses números. É interessante para ser proposta logo que os números negativos forem introduzidos.

A segunda pode ser proposta desde a 5ª série, como um desafio. Ao longo do ano pode-se propor aos estudantes que tragam novas soluções, discutam os casos mais difíceis...

O público: cerca de 40 garotos de 11 a 12 anos.

Na classe, 5 fileiras de 8 carteiras.



No início da aula o professor pediu um pequeno deslocamento das carteiras para que a cada fileira correspondesse um corredor, como no esquema ao lado. Em seguida, pediu que uma reta numerada fosse desenhada, com giz, no chão de cada corredor e nela se representassem os números de –10 a +10.

O primeiro jogo que o professor ensinou foi o seguinte:

– Um aluno coloca-se na marca do "0",

– Outro aluno dá uma instrução do tipo "ande – 3", o aluno que estava no "0" anda até " – 3".

– Outro aluno vai para o "0", a ordem "ande 5" faz com que ele se desloque até +5.

– Rapidamente todos aprenderam o jogo.

A brincadeira seguinte envolvia 3 alunos de cada fileira (os outros controlavam) e consistia no seguinte:

– um 1º aluno se colocava na marca do zero,

– um 2º aluno dava as ordens,

– um 3º aluno registrava no quadro negro, dividido em 5 colunas, o que estava sendo feito.

O 2º aluno dava ordens do tipo: "ande – 2 e depois ande – 4 e diga onde parou".

O 1º aluno executava as ordens e dizia: "– 6".

O 3º aluno escrevia:

(–2) + (–4) = (–6). Isto era repetido:

"ande – 3, depois + 5 e diga onde parou" – resposta: +2 – registrava-se:

$$(-3) + (+5) = (+2)$$

A brincadeira continuou bastante tempo, com envolvimento total da classe. (Disse-me o professor que, às vezes, dividia cada fileira em 2 times: um time dando as ordens, e o outro executando e registrando os resultados. Quando alguém errava, os times trocavam de papel).

Uns 10 minutos antes de terminar a aula, o professor pediu silêncio, dizendo que agora era a vez de ele entrar na brincadeira.Desenhou no quadro negro a reta numerada.

e perguntou à classe:

"Quanto é – 4 + 7?"

Foi muito interessante observar o movimento que os garotos faziam com os dedos:

e o grito: +3.

Disse-me o professor que nas aulas seguintes sempre desenhava a reta numerada no quadro negro mas, cada vez menos alunos precisavam mover o dedo para chegar ao resultado de uma adição. Aparentemente, os alunos vão percebendo como efetuar as adições, sem que jamais o professor precise dar a receita: "sinais iguais, soma e dá o sinal comum; sinais diferentes..."

O problema dos quatro “quatros”

A primeira vez que vi o problema dos quatro “quatros” foi como aluna de colégio.

O problema pedia que se escrevessem todos os números inteiros de 1 a 100 com quatro “quatros”.

$$0 = 44 - 44; \quad 1 = \frac{44}{44}; \quad 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4};$$

$$3 = \sqrt{4} + \sqrt{4} - \frac{4}{4}; \text{ etc.}$$

Já como professora de Matemática, e durante muitos anos, nem meus alunos, nem eu, conseguíamos escrever 33 e 41 com quatro “quatros”.

Mas, eventualmente, de tanto propor o problema, um aluno, um dia, trouxe uma solução:

$$33 = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}} + \sqrt{4}}{\sqrt{4}},$$

e anos mais tarde, outro descobriu que

$$41 = \sqrt{\frac{(4\sqrt{4})! + 4!}{4!}}.$$

Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade

Lúcia A. de A. Tinoco

A seguir temos o relato de uma experiência realizada com alunos da 7ª série trabalhando a noção de proporção e apresentando as dúvidas, interpretações e modos de resolver que ocorreram aos alunos envolvidos. A proporcionalidade é um dos conceitos matemáticos mais presentes na vida, todas as pessoas passam por experiências que possibilitam o contacto com algumas noções desse conceito ou, pelo menos, a constatação da não aquisição de tais noções.

A partir da observação de medidas de grandezas proporcionais, que variam em situações do quotidiano dos alunos, o grupo do Setor Matemático do Projeto Fundão acredita que o conceito de proporcionalidade pode ser construído.

O trabalho dessa equipe envolve atividades com escala, receitas, merenda e outras coisas, baseadas na vida real, todas orientadas no sentido de levar o aluno a detectar os dados do problema e organizá-los, de preferência em tabelas, para melhor observar suas relações.

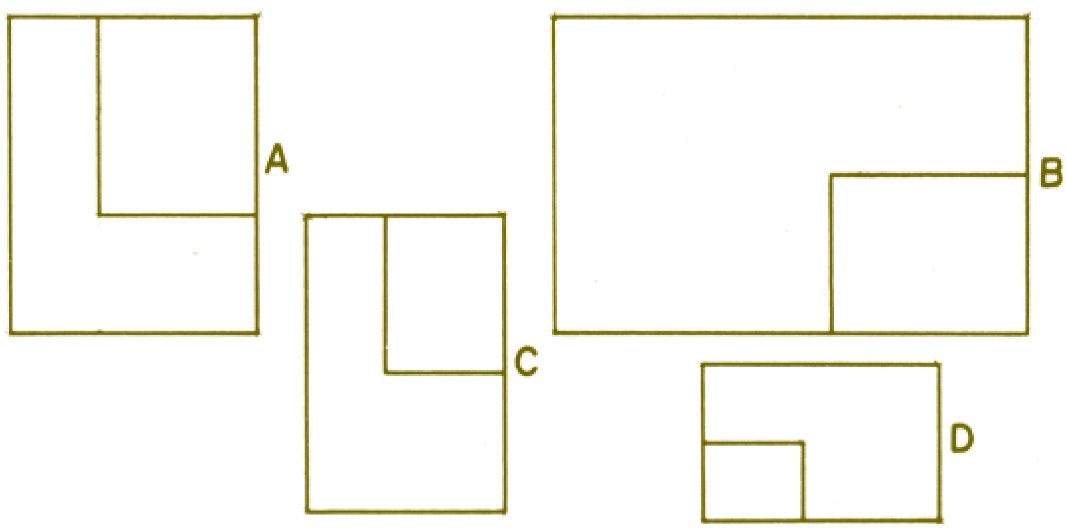
A experiência foi feita com turmas da 7ª série do ensino fundamental (12 a 14 anos).

Um primeiro exemplo de tais atividades

Entregar a cada aluno uma folha em branco a ser colocada num certo canto da carteira.

Entregar outra folha na qual estejam desenhadas quatro figuras: *A, B, C* e *D* (ver Figura abaixo). Destas, apenas duas, *B* e *D*, representam o tampo da carteira com a folha no canto, em escalas, por exemplo, de 1/5 e 1/10. Na primeira, *A,* a folha está com as dimensões proporcionais às da real, mas a carteira não; e na terceira, *C,* a carteira está reduzida corretamente, mas a folha não.

Discutir com os alunos as respostas a perguntas do tipo: *qual (is) das figuras poderia(m) ser uma fotografia da carteira com a folha? Por quê?*



A partir de respostas (em geral corretas), como "a segunda, porque, nessa outra, a folha está muito comprida" e outras, os alunos passam a medir todas as dimensões da figura real e dos desenhos. De início, essas medidas são anotadas sem qualquer ordem e, aos poucos, os alunos sentem a necessidade de alguma organização. Se for preciso, o professor sugere a utilização de tabelas. A partir daí, concluem que:

1º) quando há proporcionalidade, toda vez que um número de uma situação fica multiplicado (ou dividido) por um número *c*, o correspondente da outra situação também fica multiplicado (ou dividido) por esse número *c*;

2º) a razão entre cada par de números correspondentes nas duas situações é sempre constante.

Essas conclusões surgirão com maior facilidade, dependendo da familiaridade do aluno com a situação apresentada, e da simplicidade dos fatores de proporcionalidade. Afirmamos, também, que a segunda conclusão é muito mais difícil que a primeira, já que o conceito de razão é construído lentamente.

Um outro exemplo de tais atividades

– Apresentar aos alunos o problema:

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 *latas de tinta concentrada,* 6 *latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver* 8 *latas de tinta?*

De início, os alunos são deixados livres para resolver e discutir o problema. Depois, para melhor explorar a situação, o professor faz outras perguntas sugeridas pela tabela a seguir, que deve ser completada pelos estudantes, pedindo a eles que explicitem, a cada linha preenchida, as operações que fizeram, perguntando, por exemplo: como foram obtidos os números da 2ª linha?

Tinta concentrada	Água	Tinta diluída
4	6	
8		
	3	
1		

Observações quanto à reação dos alunos

O aluno que não tem nenhuma idéia de proporcionalidade poderá responder 10 na 2ª linha da 2ª coluna: "Já que $4 + 2 = 6$, então faço $8 + 2 = 10$."

Para esse aluno, as quantidades só se alteram por meio de adições ou subtrações. Ele não pensa em multiplicações. Para permitir que o aluno perceba seu erro, pode-se apresentar a ele outra tabela, como:

Tinta concentrada	Água	Tinta diluída
4	6	
	2	

A resposta na 2ª linha da 1ª coluna, de acordo com o raciocínio aditivo, seria 0. Bastaria portanto, para indicar o erro, perguntar ao aluno se ele ficaria com água pura.

O raciocínio multiplicativo, necessário à construção da proporcionalidade, só é adquirido pelos alunos a partir de muitas experiências, as mais variadas possíveis, desde que iniciando por situações que envolvam fatores simples (o dobro, a metade, ...).

Por exemplo, na primeira tabela, a 2ª linha será obtida da 1ª, por meio da multiplicação por 2, bem como a 3ª linha, por meio da divisão da 1ª por 2.

Além dos fatores envolvidos, o tipo de números que aparecem nos dados ou nos resultados influi decisivamente no desempenho dos alunos. Ainda observando a primeira tabela, a dificuldade na 4ª linha surge, não porque envolva fatores complicados (ela pode ser obtida da 3ª por redução à metade), mas porque a resposta é um número fracionário (3/2 ou 1,5).

Modelo aditivo × modelo multiplicativo

Embora reconhecendo que a decomposição dos dados em parcelas e a utilização de multiplicações por fatores bem simples é suficiente para os alunos resolverem a grande maioria dos problemas a eles apresentados, deparamo-nos com duas questões, a saber:

(a) *Os alunos, que resolvem os problemas de proporcionalidade pelo modelo aditivo (decomposição em parcelas), sabem por que podem fazer isso?*

(b) *É aconselhável levar esses alunos a resolver tais problemas pelo reconhecimento da igualdade de duas razões?*

A esse respeito, relataremos, a título de exemplo, entrevista feita com aluna da 7ª série, ao final do estudo do tópico de proporções.

Ressaltamos a importância do método de entrevista para melhor conhecer o raciocínio do estudante, *mas* lembramos que o exemplo aqui apresentado não deve ser encarado como um modelo a ser repetido. Outros alunos darão outras respostas e outras respostas exigem novas perguntas.

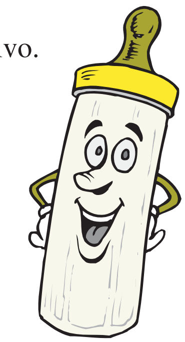
E: entrevistador. A: aluna.

E – Resolva esse problema:

Numa creche, 4 *litros de leite dão para preparar* 22 *mamadeiras iguais. Quantas mamadeiras iguais a essas poderão ser preparadas com* 10 *litros de leite?*

A dificuldade essencial, nesse caso, é reconhecer 10 como um múltiplo de 4: muitos alunos acreditam que não existe um número que multiplicado por 4 dê 10.

Tal dificuldade é contornada pelo uso do modelo aditivo.



A: $\begin{array}{ccc} 4 & \rightarrow & 22 \\ 10 & \rightarrow & 55 \end{array}$

55 mamadeiras

E – Explique o que você fez.

A – Se 4 litros dão 22 mamadeiras, 4 + 4 = 8 dão 22 + 22 = 44 e 2 dão 11 mamadeiras, logo, 10 litros dão 55 mamadeiras.

E – Por que você fez assim?

A – Porque é mais fácil.

E – É sempre possível resolver assim?

A – Depende do problema.

Para refletir sobre a questão, o entrevistador apresenta à aluna outro problema.

Com 24 *metros de brim, podem-se fazer* 16 *calças iguais. Quantas calças iguais a essas podem-se fazer com* 15 *metros do mesmo tecido?*

A – No primeiro, eu multipliquei, e agora, de 24 para 15 não posso multiplicar. Então a resposta é 7.

E – O que voce fez?

A – 24 menos 16 dá 8. Então diminuí 8 de 15.

E – Observe o outro problema:

Com 24 *metros de brim, podem-se fazer* 8 *calças iguais. Quantas calças iguais a essas podem-se fazer com* 12 *metros do mesmo tecido?*

A – (corretamente) 4, porque 12 é a metade de 24.

E – Pelo método do problema anterior você teria: 24 menos 8 dá 12 e 12 menos 12 dá zero!

(A percebeu logo, e sozinha, que ainda estava errada).

E – Vamos tentar ver a razão constante. Na primeira situação ...

A – 24 metros e 16 calças

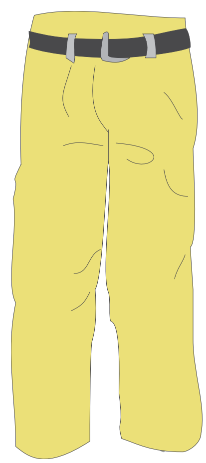
E – Se eu pedisse para você achar o pano gasto em cada calça, o que você faria?

A – 24 dividido por 16.

E – Isso é $\frac{24}{16}$.

E – Agora na segunda situação: 15 metros e *x* calças. Qual é a conta?

A – Não dá para fazer; eu não sei quanto é esse *x*.



E – Faz de conta que você sabe.

A – Então é 15 dividido por esse *x*.

E – Então é $\frac{15}{x}$, certo?

A – Certo.

E – (Apontando para $\frac{24}{16}$.)

Isso não é o pano de cada calça?

A – É.

E – (Apontando o $\frac{15}{x}$.)

Isso aqui também é?

A – É.

E – As calças são iguais?

A – São.

E – Posso escrever um igual ao outro?

A – Pode.

E: $\frac{24}{16} = \frac{15}{x}$ **.**

Agora você pode resolver.

A (demonstrando dificuldade no produto “em cruz”):

$$24x = 16 \times 25$$

$$x = \frac{16 \times 25}{24} = \frac{2 \times 25}{3} = \frac{50}{3}.$$

Conclusões

As dificuldades apontadas inicialmente são reais.

Não se deve impor a solução dos problemas de proporcionalidade direta pela igualdade de duas razões; a solução pela decomposição em parcelas é válida (como outras não analisadas aqui).

O importante é que, ao utilizar qualquer método, o aluno saiba *por que* pode utilizá-lo.

É importante que o aluno saiba que existe a solução mais econômica da proporção, para que possa optar por ela, se julgar necessário.

Regra de três composta

Os problemas sugeridos aqui trabalham o raciocínio do aluno para que ele apreenda a idéia que está por trás da regra de três. É interessante propor os problemas e discutir diferentes formas de solucioná-los.

Apesar de a "regra de três composta" ser tratada em textos didáticos e já ter sido discutida em vários números da **RPM**, nossos leitores continuam consultando-nos a respeito de problemas envolvendo proporcionalidade, como os problemas **A** e **B** abaixo. Há vários modos de resolver esses problemas e cada autor, bem como cada professor, acha, é claro, que o "seu jeito" é o melhor. Voltamos ao tema, apresentando duas soluções alternativas para cada um dos problemas **A** e **B**, consideradas, é claro, como as "melhores" pelos seus autores.

Problema A

21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam um edifício em 6 dias. Nas mesmas condições, quantos dias serão necessários para que 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, pintem o mesmo edifício?

Resolução 1

Sempre é possível resolver esse tipo de problema com a chamada "redução à unidade", que consiste no seguinte:

21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam o edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 8 horas por dia, pinta $\frac{1}{21}$ do edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 1 horas por dia, pinta $\frac{1}{21} \times \frac{1}{8}$ do edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 1 horas por dia, pinta $\frac{1}{21} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{6}$ do edifício em 1 dia;

9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, pintam $9 \times 7 \times \frac{1}{21} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$ do edifício em 1 dia.

logo, 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, precisam de 16 dias para pintar o edifício todo. Fácil, não é?

Resolução 2

Montando uma equação algébrica que exprime a dependência entre as variáveis envolvidas no problema:

Sejam p o número de pintores, h o número de horas que eles trabalham por dia e d o número de dias. O produto phd é o número total de horas trabalhadas; logo, deve ser o mesmo nas duas situações descritas, isto é,

$$21 \times 8 \times 6 = 9 \times 7 \times d\,,$$

de onde $d = \frac{21 \times 8 \times 6}{9 \times 7} = 16$ dias.

Pronto, terminou o problema! Lembre-se: regra de três (simples), direta ou inversa; não passe de uma equação algébrica simples e fácil de resolver.

Problema B

Se 10 *máquinas, funcionando* 6 *horas por dia, durante* 60 *dias, produzem* 90 000 *peças, em quantos dias*, 12 *dessas mesmas máquinas, funcionando* 8 *horas por dia, produzirão* 192 000 *peças?*

Resolução 1

Novamente, é possível resolver esse problema com a chamada "redução à unidade":

10 máquinas	6 horas por dia	60 dias	90 000 peças
1 máquina	6 horas por dia	60 dias	9 000 peças
1 máquina	1 hora por dia	60 dias	$\frac{9\,000}{6}$ peças
1 máquina	hora por dia	1 dia	$\frac{1\,500}{60} = 25$ peças
12 máquinas	1 hora por dia	1 dia	$12 \times 25 = 300$ peças
12 máquinas	8 horas por dia	1 dia	$8 \times 300 = 2\,400$ peças

Então, 12 máquinas, trabalhando 8 horas por dia, fazem 2 400 peças. Logo, para produzir 192 000 peças serão necessários

$$\frac{192000}{2400} = 80 \text{ dias.}$$

Resolução 2

Montando uma equação algébrica que exprime a dependência entre as variáveis envolvidas no problema:

Sejam m o número de máquinas, h o número de horas de funcionamento por dia, d o número de dias, e p o número de peças produzidas.

Se k é o número de peças que cada máquina produz por hora, temos:

$$p = k \times m \times h \times d$$

ou

$$k = \frac{p}{m \times h \times d}$$

Substituindo na equação obtida as duas seqüências de valores dadas no problema, temos:

$$\frac{90000}{10 \times 6 \times 60} = k = \frac{192000}{12 \times 8 \times d},$$

de onde $d = \dfrac{10 \times 6 \times 60 \times 192000}{90000 \times 12 \times 8} = 80.$

VOCÊ SABE POR QUE FUNCIONA?
Considere os exemplos abaixo:

867
86 – 9 × 7 = 23

23 não é divisível por 13, logo 867 também não.

8 281
828 – 9 × 1 = 81**9**
81 – 9 × 9 = 0

0 é divisível por 13, logo 8 281 também é.

36 546
3 654 – 9 × 6 = 351**0**
351 – 9 × 0 = 35**1**
35 – 9 × 1 = 26
23 é divisível por 13, logo 36 546 também é.

77 741
7 774 – 9 × 1 = 7 76**5**
776 – 9 × 5 = 73**1**
73 – 9 × 1 = 64

64 não é divisível por 13, logo 77 741 também não.

Que regra os exemplos sugerem? Como provar que é verdadeira ou não?

Uso inteligente da calculadora

Hideo Kumayama

Atividades envolvendo o uso da calculadora podem contribuir para motivar diversos tópicos do conteúdo. Esta atividade em particular trata de "números grandes" e de como contornar as limitações impostas pela calculadora.

É preciso que o estudante já domine a notação de potência para descrever números grandes. É interessante enfatizar que a calculadora é uma ferramenta com limitações que podem ser contornadas, se usarmos nossos conhecimentos. Outra possibilidade é explorar nessa atividade números surpreendentes como: distância da Terra ao Sol, distância de Plutão ao Sol etc. O professor de Ciências pode ter boas sugestões de "números grandes".

Introdução

Segundo uma conhecida lenda originária da Índia, o rei Shirham recebeu de presente do grão-vizir Sissa Bem Dahir um jogo de xadrez, inventado por ele próprio. De imediato, o rei decidiu retribuir essa dádiva, mas não sabia como. Assim, o rei deixou a escolha da recompensa a critério do vizir, o qual pediu: Majestade, dê-me um grão de trigo correspondente à primeira casa do jogo de xadrez, dois grãos correspondendo à segunda casa, quatro à terceira, e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos, até a 64ª casa. O rei ficou espantado com a simplicidade do pedido, porém mais surpreso ainda ficou quando constatou que não conseguiria satisfazê-lo, pois o número total de grãos no tabuleiro, a saber, $2^{64} - 1$, é um número imenso. De fato, usando uma calculadora científica com 12 dígitos no visor, obtém-se para esse número $1{,}84467440733 \times 10^{19}$.

Esse exemplo é muito usado em aula, especialmente no estudo de progressões geométricas. Porém os alunos muitas vezes se perguntam: Mas o número $2^{64} - 1$ não é inteiro? É possível, com a calculadora determinar todos os algarismos desse número? A resposta é sim.

Primeiro observa-se que o resultado fornecido pela calculadora é

$2^{64} = 1{,}84467440737 \times 10^{19} = 18\ 446\ 744\ 073\ 700\ 000\ 000$. Na realidade, isso é uma aproximação do verdadeiro resultado, dada a impossibilidade de a calculadora exibir todos os 20 algarismos desse número inteiro. Temos que nos precaver ainda contra o fato de que o último 7 pode não ser exato; ele pode ter sido aproximado para cima. (Por exemplo, se você preparar sua calculadora para trabalhar com 4 dígitos no visor, ela vai dar: $2^{64} = 1{,}845 \times 10^{19}$. Alguém poderia erradamente concluir que o quarto algarismo de 2^{64} é 5, quando na realidade é 4, que foi aproximado para 5 porque o seguinte era $6 \geq 5$.) Portanto, o que sabemos mesmo é que $2^{64} = 1{,}84467440737$ xxx xxx xxx. Nosso objetivo é descobrir quais são os 9 últimos algarismos desse número, sendo o primeiro deles igual a 6 ou 7.

Uma forma de proceder é a seguinte.

A calculadora com 12 dígitos no visor consegue exibir todos os algarismos de

$$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296 = 42\ 949 \times 10^5 + 67\ 296.$$

Denotando-se $a = 42\ 949$ e $b = 67\ 296$, tem-se:

$$2^{64} = (2^{32})^2 = (a \times 10^5 + b)^2 = a^2 \times 10^{10} + 2ab \times 10^5 + b^2.$$

A primeira parcela é um inteiro terminado em 10 zeros e, portanto, não vai influir nos últimos 9 algarismos da soma. Os números $2ab$ e b^2 podem ser calculados na calculadora, obtendo-se $2ab \times 10^5 + b^2 =$ $= 578\ 059\ 180\ 800\ 000 + 4\ 528\ 751\ 616$. Neste ponto, não adianta fazer essa soma na calculadora, porque a primeira parcela não cabe no visor. Como porém estamos interessados apenas nos 9 últimos algarismos desse número, fazemos: $180\ 800\ 000 + 528\ 751\ 616 = 709\ 551\ 616$. Conclui-se finalmente que $2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$.

A propósito de exercícios, o leitor pode experimentar outras maneiras de decompor 2^{32} em parcelas. Verá que algumas funcionam melhor que outras. Por exemplo, na decomposição $2^{32} = 429 \times 107 + 4\ 967\ 296$, o quadrado da segunda parcela não caberá no visor.

O que acontece, se só dispusermos de uma calculadora "do feirante", com apenas 8 dígitos no visor? Neste caso, já 2^{32} não cabe no visor, aparecendo 42,949672 e $4{,}2949672 \times 10^9$.

Em primeiro lugar, deve ser lembrado que é perfeitamente possível calcular rapidamente potências nesse tipo de calculadora. Em seguida, pode-se usar um procedimento análogo ao precedente, partindo de $2^{16} = 65\ 536$, para determinar os 3 algarismos de $2^{32} = 4\ 294967$ xxx.

Por exemplo: $2^{32} = (2^{16})^2 = (65 \times 10^3 + 536)^2 = 4\,225 \times 10^6 + 69\,680\ \text{´}\ 10^3 + 287\,296$. Aqui, a primeira parcela termina em 6 zeros e a segunda, em 4 zeros. De modo que os 3 últimos algarismos de 2^{32} são 296 e, portanto, $2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

Na calculadora de 8 dígitos no visor, o número 2^{64} aparece como

$$1{,}8446744 \times 10^{19} = 18\,446\,74\text{x xxx xxx xxx xxx},$$

e precisamos descobrir seus 13 últimos algarismos. Agora, não adianta decompor 2^{32} como feito anteriormente, pois aparecerão números com mais de 8 algarismos.

Um caminho promissor é decompor 2^{32} em 3 parcelas convenientemente escolhidas e, em seguida, utilizar a fórmula

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \text{ Assim:}$$

$2^{64} = (2^{32})^2 = (4\,294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296)^2$. Agora, a calculadora permite calcular:

$$\begin{array}{rcr}
4\,294 \times 10^{12} & = & 18\,438\,436\,000\,000\,000\,000 \\
2 \times 4\,294 \times 967 \times 10^9 & = & 8\,304\,596\,000\,000\,000 \\
(967^2 + 2 \times 294 \times 296) \times 10^6 & = & 3\,477\,137\,000\,000 \\
2 \times 967 \times 296 \times 10^3 & = & 572\,464\,000 \\
296^2 & = & 87\,616 \\
\hline
2^{64} & = & 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616
\end{array}$$

Esperamos que esses exemplos estimulem o leitor a usar inteligentemente a sua calculadora, para superar as limitações desse instrumento.

Algarismos romanos. Uma aula diferente

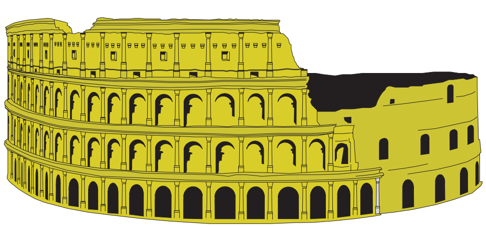
Márcia de Oliveira Rebello
Rosângela Tortora

Uma atividade lúdica que explora a competitividade natural entre as crianças, por meio de um jogo, para estudar os algarismos romanos.

Não deve existir um método "ótimo" para ministrar aulas, que torne todas elas interessantes e que faça com que *todos* os alunos gostem e aprendam Matemática.

Sabemos, porém, que, ocasionalmente, uma aula diferente, por quebrar uma rotina, estimula o interesse dos alunos e facilita o aprendizado.

O equivalente, em Matemática, à "palavra cruzada" foi por nós aproveitado para ministrar, numa 5ª série, uma aula de fixação sobre algarismos romanos, aproveitando o gosto que crianças, na faixa etária dos 11 anos, têm por jogos competitivos.



Procedemos da seguinte maneira:

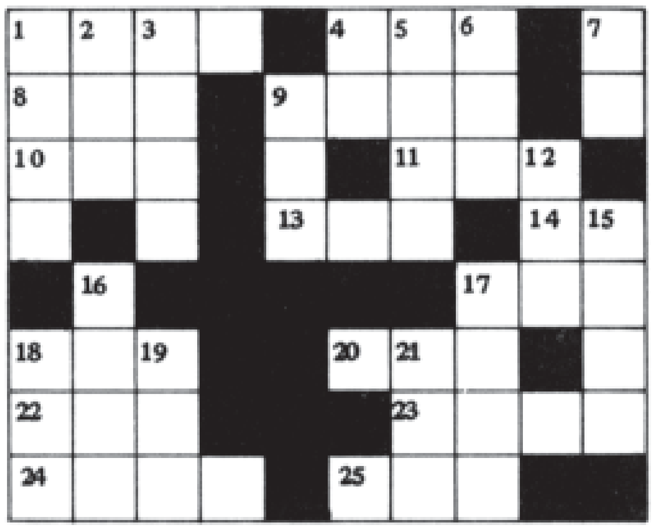
1. dividimos a classe em dois times;
2. colocamos as colunas "horizontais" e "verticais" na parte central da lousa;
3. copiamos um quadro para cada time;
4. estabelecemos as regras do jogo:

a. cada aluno pode escolher arbitrariamente qualquer questão;

b. dada a partida, um primeiro aluno, de posse de um giz, deverá ir à lousa, responder à questão que escolheu, voltar ao seu lugar e entregar o giz ao colega seguinte. Este poderá colocar a resposta de uma outra questão, *ou* corrigir uma que julgue estar errada; cada aluno, após colocar sua resposta no quadro, entregará o giz ao seguinte, que deverá proceder da mesma forma;

c) o time que terminar primeiro de preencher seu quadro, corretamente, será o campeão do dia.

Escreva com algarismos arábicos:



Horizontal	Vertical
1. MMDCXXI	1. MMDL
4. CDXXXV	2. DCXLVIII
8. DXLI	3. MMCLXXV
9. MMMXL	4. XL
10. DLXXXVII	5. MMMCDLXXVIII
11. DCCVII	6. D
13. DCXXXVIII	7. LXXXIX
14. XCII	9. CCCXLVI
17. CXII	12. DCCXCI
18. CMXLVI	15. MMCCXXII
20. CCCXXIV	16. MMMCDLXXXIX
22. DLXXXIII	17. MCDII
23. MMMXLII	18. CMLI
24. MCMLXXIV	19. DCXXXVII
25.CMLII	21. CCXXXV

Observação

Nenhum aluno deverá ir à lousa pela segunda vez, antes que todos os outros do seu time tenham ido uma vez ao menos.

Mágicas

Adivinhação

Duas "mágicas" intrigantes que levam ao estudo do critério de divisibilidade por 9. A brincadeira da caixa de palitos de fósforos pode ser feita pelo professor na sala de aula e utilizada desde a 5ª série.

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos.

Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado.

A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira "adivinha" o algarismo que foi ocultado.

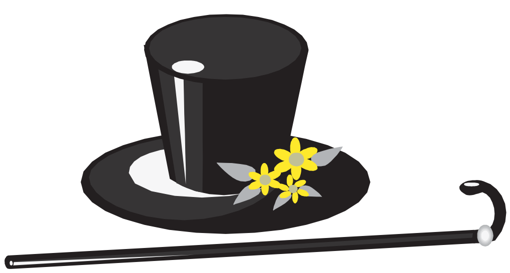
Exemplo

Número pensado: $A = 6435879$

$A - S =$

$= 6435879 - (6 + 4 + 3 + 5 + 8 + 7 + 9) =$

$= 6435879 - 42 = 6435837.$



A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo **8** e fornece a soma dos outros que é

$$6 + 4 + 3 + 5 + 3 + 7 = 28.$$

Como **a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9***, "adivinha-se" que o algarismo ocultado é 8, uma vez que $28 + 8 = 36$.

Esse resultado está enunciado e demonstrado abaixo.

Proposição

Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, então $A - S$ é um múltiplo de 9.

Demonstração

A demonstração do resultado utiliza a representação decimal do número A:

$$A = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \ldots + 10a_{n-1} + a_n,$$

$A - S = (10^{n-1} - 1)a_1 + (10^{n-2} - 1)a_2 + \ldots + 9a_{n-1} + a_n$, que é um múltiplo de 9.

De ouvido

Alexandre Kleis

Meu irmão faz uma brincadeira com uma caixa de fósforos muito curiosa. Ele pega uma caixa, dessas comuns, e conta quantos fósforos há — 40, digamos. Dá a caixa a alguém e pede que este retire, às escondidas, um certo número de palitos; em seguida, que some os algarismos deste número e reponha esta quantidade de palitos. (Por exemplo, retira 25 palitos e repõe 2 + 5 = 7 palitos.) Aí, vem o surpreendente: pega a caixa, *balança-a, ao lado do ouvido,* faz uma cena e vaticina: "Há 22 palitos na caixa!" (para o exemplo, o que é certo: 40 – 25 + 7 = 22).

Notem: ele não viu nada, não teve nenhuma informação e, apenas pelo som dos palitos dentro da caixa, descobre a quantidade deles.

O segredo é simples. Sejam $x \in IN$ e $\overline{x}$ a soma dos algarismos da representação decimal de x. Ora, retirar x palitos e repor $\overline{x}$ palitos equivale a retirar $x - \overline{x}$ palitos. Como se sabe, x e $\overline{x}$ têm o mesmo resto quando divididos por 9, logo $x - \overline{x}$ é múltiplo de 9. Deste modo, está se retirando sempre um número múltiplo de 9 da caixa. Se ela contiver 40 palitos, teremos:

Retirando		... sobram
0	→	40
9	→	31
18	→	22
27	→	13
36	→	4

Tudo consiste então em se treinar o ouvido para identificar, pelo ruído, as cinco possíveis respostas!

O adivinho indiscreto

Esta "brincadeira" pode ser apresentada a estudantes de qualquer nível. No entanto, para um estudante já familiarizado com a noção de potência, é mais fácil explicar em que se baseia a "mágica". Uma proposta interessante é só apresentar as tabelas com os números de 1 a 31 e sugerir aos estudantes que eles mesmos coloquem os números de 33 a 63 nas tabelas.

Idéia para uma feira de ciências

Um visitante que se apresenta para o teste é convidado pelo aluno "adivinho" a dizer, dentre as seis listas exibidas mais a frente, de 32 números cada, em quais delas está a sua idade. Imediatamente o aluno adivinha a idade.

Como? Basta somar os primeiros números das listas que o visitante apontou.

Exemplos

1) Uma pessoa diz que sua idade figura nas listas 1, 3 e 6. O aluno adivinho faz: $1 + 4 + 32$ obtendo 37 anos como a idade desse visitante.

2) Se a idade do visitante é 55 anos, então está nas listas 1, 2, 3, 5 e 6. E 55 é obtido efetuando-se a soma $1 + 2 + 4 + 16 + 32$.

Vejamos por que:

Um número n, entre 1 e 63, pode ser escrito como $n = a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$ sendo os números $a_0, a_1, \ldots, a_5$ iguais a 0 ou 1 (e, neste caso, a representação do número n em base 2 é, exatamente, $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$).

Por exemplo:

$$33 = 32 + 1 = 2^5 + 1 = 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = (100001)_2$$

$$63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = (111111)_2.$$

Pois bem, na primeira lista do adivinho estão os números para os quais $a_0 = 1$, isto é, aqueles que terminam em 1 quando escritos em base 2; na segunda lista estão os números com $a_1 = 1$, ou seja, aqueles, entre 1 e 63, que têm 1 na segunda casa da direita para a esquerda, quando escritos em base 2; na terceira lista estão aqueles para os quais $a_2 = 1$, e assim por diante.

Eis as listas do adivinho.

Lista 1		Lista 2		Lista 3		Lista 4		Lista 5		Lista 6	
1	33	2	34	4	36	8	40	16	48	32	48
3	35	3	35	5	37	9	41	17	49	33	49
5	37	6	38	6	38	10	42	18	50	34	50
7	39	7	39	7	39	11	43	19	51	35	51
9	41	10	42	12	44	12	44	20	52	36	52
11	43	11	43	13	45	13	45	21	53	37	53
13	45	14	46	14	46	14	46	22	54	38	54
15	47	15	47	15	47	15	47	23	55	39	55
17	49	18	50	20	52	24	56	24	56	40	56
19	51	19	51	21	53	25	57	25	57	41	57
21	53	22	54	22	54	26	58	26	58	42	58
23	55	23	55	23	55	27	59	27	59	43	59
25	57	26	58	28	60	28	60	28	60	44	60
27	59	27	59	29	61	29	61	29	61	45	61
29	61	30	62	30	62	30	62	30	62	46	62
31	63	31	63	31	63	31	63	31	63	47	63

Essas listas de números podem ser feitas em tiras, todas iguais, de cartolina, lembrando um baralho, para melhor manuseio e a soma dos primeiros números pode ser feita de cabeça. O aluno deve fazê-la bem. Talvez seja melhor que *dois* alunos se encarreguem de fazê-la para conferir entre si, antes de contá-la ao visitante.

É claro, agora, porque cada idade é igual à soma dos primeiros números de cada lista em que ela esteja, não?

Talvez valesse a pena estender a tabela até 100 pelo menos, ou 127, para atender os avós que venham visitar a feira. Quais as modificações que precisam ser introduzidas?