Dominós

Fechando o dominó

Alexandre Kleis

Estas atividades usam o jogo de dominós para motivar o estudo de contagem, múltiplos, divisores e paridade de números naturais.
A simples construção de um jogo de dominós, usando cartolina ou papel cartão é um exercício de contagem organizada para decidir, por exemplo, quantas e quais peças precisam ser construídas,ou quantas vezes um determinado número aparece nas peças.
A construção pode ser feita mesmo na 5ª série. O desafio da construção dos "quadrados mágicos" com as peças de dominó exercitam a criatividade e as operações aritméticas.
"Fechando o dominó" envolve observação, contagem e paridade.
Estas atividades podem ser utilizadas desde a 5ª série, mas serão úteis e lúdicas também para alunos até da 8ª série.

O problema

Meu irmão estava jogando dominó com alguns amigos, quando um deles "fechou" o jogo. Encerrado assim, sem ninguém "bater", cada dupla contou seus pontos (a soma dos números das pedras que sobraram). Um jogador disse "22" e outro falou "15". Aí um amigo de meu irmão protestou:

— Não pode! Se o jogo foi fechado e uma dupla tem um número par de pontos, a outra também tem. Ou então as duas têm números ímpares de pontos.

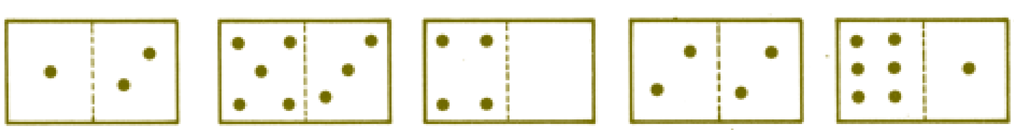
De fato, analisando o jogo, descobriram um "gato": uma pedra colocada erroneamente, lá no meio.

Meu irmão ficou curioso. Por que a paridade das somas de pontos tinha de ser a mesma? Seu amigo lhe deu uma resposta que não o convenceu — jogava há anos dominó e sempre fora assim.

O que segue é uma explicação que encontrei para esta dúvida.

A explicação

O dominó é um jogo formado por 28 peças, como as da figura:



Nelas aparecem todas as combinações possíveis dos números de 0 a 6, dois a dois, inclusive com repetição. Cada número aparece 8 vezes.

Creio que todos os leitores conhecem as regras do jogo.

Um exemplo de jogo fechado é o seguinte:

Este jogo se diz “fechado” porque todas as pedras que contêm o “3” já estão na mesa e, em conseqüência, ninguém mais tem como jogar.

Em um jogo fechado, os números nas duas extremidades são iguais. De fato, todos os números, salvo os das pontas, aparecem aos pares, pela própria regra do jogo. Portanto, um jogo fechado que começa com 3, por exemplo, terá 6 ocorrências do 3 “internamente” e o último 3 disponível terá que estar, necessariamente, na outra ponta.

Como conseqüência, a soma de todos os números (na mesa), em um jogo fechado, será *par.*

Observando que a soma total dos pontos em um jogo de dominós é $S = 8\ (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ e, por-tanto, *par,* vê-se que, em um jogo fechado, sobra, ao todo, um número par de pontos nas mãos das duas equipes adversárias.

Isto significa que cada uma das equipes terá um número par de pontos (dando uma soma par), ou cada uma das equipes terá um número ímpar de pontos (dando também uma soma par). O que não pode acontecer é que a soma dos pontos de uma equipe seja par e da outra, ímpar, pois neste caso a soma total seria ímpar, o que já vimos não pode acontecer.

Outra observação

Com uma definição adicional, podemos tirar mais uma conclusão.

Definição. *Uma pedra é ímpar quando a soma de seus números for ímpar.*

Por exemplo, 3 : 2 é uma pedra ímpar.

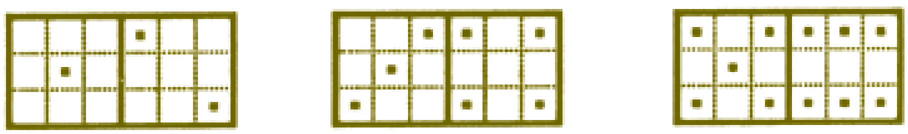
Conclusão. *Em um jogo fechado, a quantidade de pedras ímpares, na mesa, é par.*

De fato, já vimos que em um jogo fechado, a soma dos pontos, na mesa, é par. Ora, uma soma par deve ter um número par de parcelas ímpares.

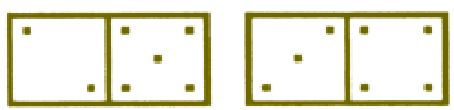
O jogo de dominós
(um desafio matemático?)

José Lafayette de
Oliveira Gonçalves

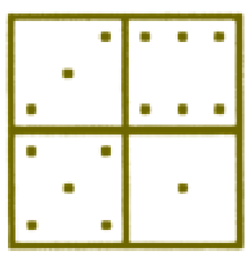
Um jogo muito antigo e conhecido por muitos estudantes e professores é o jogo de dominós. Ele é constituído por 28 peças retangulares e pode ser confeccionado com retângulos, por exemplo, de 6 cm x 3 cm, divididos em 18 quadradinhos de 1 cm x 1 cm. A marcação dos pontos em cada peça deve obedecer a uma certa estética:



As peças de dominó têm sido usadas em sala de aula, nas séries iniciais, para efetuar e fixar pequenas somas. Por exemplo:



2 + 5 = 3 + 4 = 7



9
+
6

8 + 7 15

O próprio jogo de dominós é desafiante. O mais comum é o que envolve 4 jogadores, divididos em duplas. Cada jogador recebe 7 peças, e torna-se vencedora aquela dupla em que um dos parceiros consegue colocar todas as suas peças antes dos demais jogadores. Jogadores hábeis observam as peças à medida que vão sendo jogadas e descobrem rapidamente quais ainda estão nas mãos do parceiro ou dos adversários, permitindo-lhes elaborar estratégias que os levam à vitória.

Podemos também utilizar os dominós para apresentar aos nossos alunos alguns desafios interessantes:

1. Com as 8 peças: (0 e 0); (0 e 1); (0 e 2); (0 e 3); (1 e 1); (1 e 2); (2 e 2) e (2 e 3), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 5.

   Um pouco mais difícil é o seguinte desafio:

2. Com as 8 peças: (1 e 1); (1 e 2); (1 e 3); (1 e 4); (2 e 3); (2 e 4); (3 e 4) e (3 e 5), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 10.

3. Trocando apenas as peças (l e 1) e (3 e 5) pelas peças (0 e 2) e (4 e 4), repetir o desafio acima.

4. Finalmente, com as 18 peças:

   (0 e 0); (0 e 1); (0 e 2); (0 e 3); (0 e 4); (0 e 5);

   (1 e 1); (1 e 2); (1 e 3); (1 e 4); (1 e 5); (1 e 6);

   (2 e 2); (2 e 3); (2 e 4); (2 e 6); (3 e 3) e (3 e 4),

   formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 13.

O jogo dos quadrinhos

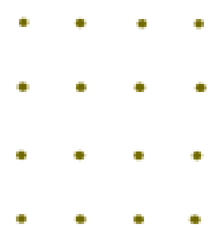
Helder de Carvalho Matos

Esta atividade utiliza o jogo de quadradinhos, que é bastante conhecido em algumas regiões. Caso os alunos não o conheçam, o professor pode apresentá-lo e ensiná-los a jogar.

A atividade estabelece estratégias para se ganhar o jogo e pode ser aplicada, com adaptações em qualquer série da 5ª a 8ª.

O jogo de quadrinhos é muito conhecido e tão simples que pode ser explicado em poucas palavras. Ele é jogado num quadriculado de pontos como ilustra a Figura 1.

Figura 1



Cada jogador marca uma aresta unindo dois vértices na mesma horizontal ou na mesma vertical (Figura 2).

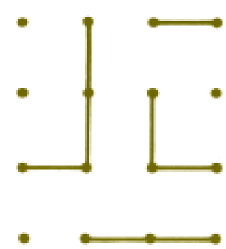


Figura 2

E toda vez que um dos jogadores, ao colocar uma aresta, completar um circuito fechado, ele tem direito (e obrigação) de marcar nova aresta (é importante não confundir "circuito fechado"com "quadrinho unitário" ou, simplesmente, "quadrinho". Embora todo quadrinho seja um circuito fechado, este pode ser mais geral que um simples quadrinho, como ilustra a Figura 3).

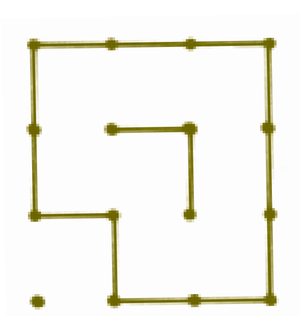


Figura 3

Ganha o jogador que fechar o maior número de quadrinhos, e o jogo termina quando o quadriculado original ficar reduzido apenas a quadrinhos. Para facilitar a contagem, os jogadores marcam os quadrinhos que vão fechando com sua inicial. Por exemplo, se Herculano joga com André, o jogo pode terminar com a vitória de André (Figura 4)

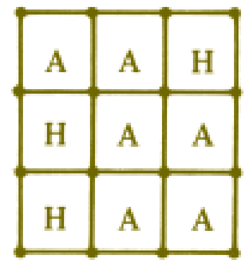


Figura 4

O jogo de quadrinhos é largamente jogado em fundos de salas de aulas, sobretudo quando a aula fica muito chata... E foi depois de muito jogar em tais circunstâncias que acabei descobrindo como prever, em qualquer jogo, qual dos dois jogadores ganhará (ou, pelos menos empatará) o jogo.

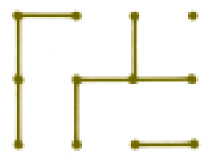


Figura 5

Daremos algumas definições preliminares. Diremos que o jogo se encontra numa situação *quase final*, quando no quadriculado não existirem quadrinhos com três arestas, mas um tal quadrinho forçosamente se formará com o acréscimo de qualquer nova aresta (Figuras 5 e 6). Chamaremos *corredor* a uma seqüência de quadrinhos que serão fechados por jogadas sucessivas de um mesmo jogador (Figura 6).

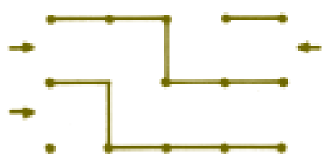


Figura 6

Quando um jogo se encontra em situação quase final, como ilustra a Figuras 6, ele consiste exclusivamente de corredores, e qualquer aresta adicional precipita o fechamento de quadrinhos ao longo de um corredor. Vamos enumerar os corredores em ordem crescente (mais precisamente, não-decrescente) de seu tamanho. Por *tamanho de um corredor* entendemos o número de quadrinhos que ele produz com os fechamentos sucessivos. No caso da Figura 7, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$ e $C_4 = 5$.

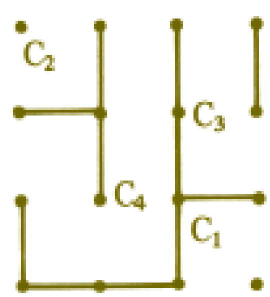


Figura 7

Vamos supor, como é natural, que cada jogador proceda da maneira a não entregar quadrinhos; e se for obrigado a entregar alguns, que entregue o menor número possível, isto é, que entregue o corredor que tenha menos quadrinhos a fechar. Chamaremos esse procedimento de *perda mínima*. Veremos, logo adiante, que tal procedimento não assegura vitória, ou mesmo empate; mas permite prever quem vai ganhar (ou empatar) o jogo.

Observemos agora que o jogador que fechar o último corredor (o de número r), fecha também os de números $r - 2$, $r - 4$, ..., e o outro jogador fechará os corredores $r - 1$, $r - 3$, $r - 5$, ... Há dois casos a considerar, conforme r seja par ou ímpar.

1º caso: *r par*. O jogador que fechar o último corredor ganhará um número de quadrinhos igual a

$$S_1 = C_r + C_{r-2} + \dots + C_2$$

e o outro jogador ficará com $S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + \dots + C_1$ quadrinhos.

2º caso: *r ímpar*: O jogador que fechar o último corredor ganhará

$S_1 = C_r + C_{r-2} + \dots + C_1$ quadrinhos, ao passo que o outro ficará com

$S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + \dots + C_2$ quadrinhos.

Vamos colocar esses dois casos a lado, em colunas, o que nos permite comparar as somas S_1 e S_2.

r par	r ímpar
$C_r \geq C_{r-1}$	$C_r \geq C_{r-1}$
$C_{r-2} \geq C_{r-3}$	$C_{r-2} \geq C_{r-3}$
. . . .	. . . .
$C_2 \geq C_1$	$C_1 > 0$
Soma $S_1 \geq S_2$	Soma $S_1 > S_2$

Isto permite constatar, facilmente, que o jogador que terminar o jogo sempre levará vantagem e certamente ganhará se r for impar, pois neste caso, S_1 é estritamente maior que S_2. Portanto, a estratégia para ganhar (ou, pelos menos, empatar) o jogo é assegurar-se de fechar o último corredor.

Quando, ainda no ensino médio, eu me divertia com o jogo de quadrinhos, acabei percebendo a necessidade de ganhar o último corredor para não perder o jogo. E acabei descobrindo também que *se o número de vértices for ímpar, então ganha ou empata o primeiro jogador (o que começa o jogo); ao passo que se o numero de vértices for par, então ganha ou empata o segundo jogador.*

Para estabelecermos esse resultado, vamos considerar o jogo já em situação quase final, quando então vale a seguinte fórmula de Euler generalizada*:

$$A + r = V + R - 2,$$

onde A é o número de arestas, r o numero de corredores, V o número de vértices e R o número de regiões. As Figuras 6 e 7 ilustram jogos com uma única região cada um, que é o plano todo. Já as Figuras 8 e 9 mostram jogos com três regiões cada um: R_1, R_2 e R_3.

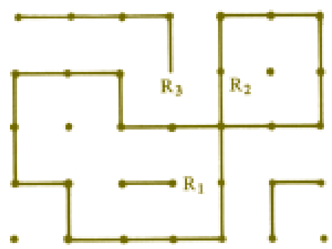


Figura 8

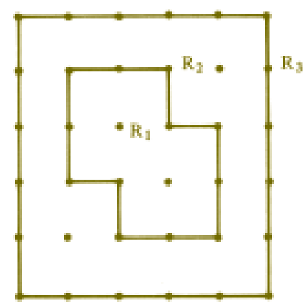


Figura 9

Para determinar quem ganha o último corredor e, portanto, ganha ou empata o jogo, vamos primeiro supor que $R = 1$ quando o jogo chega a uma situação quase final. Isto significa que no quadriculado não há circuitos fechados. Então, a fórmula de Euler nos dá.

$$A + r = V - 1.$$

Temos de examinar duas hipóteses, conforme V seja ímpar ou par, e cada uma delas comporte dois casos.

1ª hipótese: V é impar. Então $A + r$ é par, daí os dois casos seguintes:

Caso 1a: A e r ambos pares. Disto decorre que foi o segundo jogador quem colocou a última aresta (pois A é par), levando o jogo à situação quase final. Portanto, é o primeiro jogador que entregará o primeiro corredor ao segundo; e como r é par será o primeiro quem fechará o último corredor, ganhando ou, pelo menos, empatando o jogo.

Caso 1b: A e r, ambos ímpares. Então, foi o primeiro jogador quem colocou a última aresta (pois A é impar), levando o jogo à situação quase final. Em

* Essa fórmula é uma conseqüência simples da fórmula de Euler para grafos planos (veja-a na pág 143 do livro *Teoria e Modelos de Grafos* de Paulo O. Boaventura Netto. Editora Edgard Blücher, 1979)

conseqüência, o segundo jogador entregará o primeiro corredor ao primeiro jogador; e como r é impar, o primeiro jogador fechará o último corredor, ganhando o jogo, pois neste caso não há empate.

2ª hipótese: V é par. O raciocínio aqui é inteiramente análogo ao da 1ª hipótese, com dois casos a considerar. A única diferença é que agora quem ganha ou empata o jogo é o segundo jogador.

Falta examinar o caso em que $R > 1$. Ora, quando o jogo começa, $R = 1$, pois só temos uma região, que é o plano todo. *E*, se R permanecer igual a 1 até a situação quase final, um dos jogadores é o favorecido; como acabamos de ver, trata-se do primeiro, se V for ímpar e do segundo se V for par. Se um dos jogadores decide fechar um circuito, ele altera a paridade de $V + R - 2$, na situação quase final, portanto altera a paridade da soma $A + r$ na fórmula de Euler e, repetindo os argumentos já usados, o anteriormente favorecido passa a ser o desfavorecido. Mas lembremos que, pelas regras do jogo, o próprio jogador que fechou um circuito é obrigado a colocar uma nova aresta, o que novamente altera a posição dos jogadores, restabelecendo as previsões originais. Isto completa a demonstração do teorema em todos os casos.

Dois é maior que três?

Evidentemente que existe um erro na demonstração. Deixamos para o leitor sua descoberta e discussão.

2 > 3

DEMONSTRAÇÃO

Afirmações	Razões
1. $1/4 > 1/8$	1º De duas frações de mesmo numerador, maior é a que tem menor denominador.
2. $(1/2)^2 > (1/2)^3$	2º Colocando 1/4 e 1/8 sob forma de potência.
3. $\log (1/2)^2 > \log(1/2)^3$	3º A um número maior, corresponde também um logaritmo maior.
4. $2.\log 1/2 > 3.\log 1/2$	4º Propriedade operatória dos logaritmos.
5. $2 > 3$?	5º Dividindo ambos os membros de (4) por log 1/2;

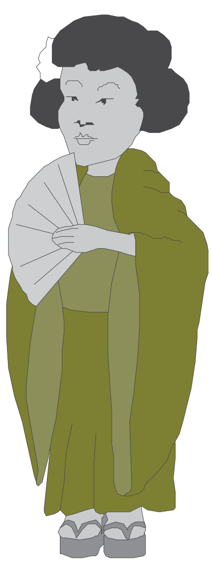
Se fosse usado logaritmo de base positiva menor que um nesta demonstração, que conseqüência traria para razão (3')?

Abdala Gannam

O jogo do Nim – um problema de divisão

Carlos Alberto V. de Melo

Este antigo jogo chinês exercita a operação de divisão, além do raciocínio dedutivo e busca de estratégias de vitória. Um aluno de 5ª série pode ser sempre um vencedor, se entender a Matemática envolvida no jogo.



Existe um jogo de palitos, tradicionalmente famoso, proveniente da China e chamado JOGO DO NIM.

O jogo, disputado por dois jogadores, é estabelecido da seguinte forma:

1. a quantidade de palitos deve ser um número ímpar;
2. cada jogador retira, por sua vez, uma determinada quantidade de palitos, sendo que esta quantidade deve ter um limite mínimo e um máximo, previamente fixados;
3. perde aquele que retirar o último palito.

Com o advento e a popularização dos microcomputadores, este jogo passou a fazer parte do repertório de brincadeiras que se podem fazer com estas máquinas.

Certa vez, um aluno do ensino médio quis saber se existe um método ou fórmula para ganhar do computador, acrescentando que, se a fórmula fosse muito difícil, não seria necessário explicá-la.

Estupefato ele ficou com a resposta: se ele for o primeiro a jogar, sempre poderá ganhar pois o método que lhe dará a vitória é simplesmente um problema de divisão. Assim, qualquer aluno de 5ª série poderá ser um grande vencedor.

Vejamos, então, o método:

Suponhamos que nosso jogo conste de 29 palitos, e que possamos retirar no mínimo 1 (um) e no máximo 4 palitos.

O primeiro a jogar fará mentalmente a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 29 & 5 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

Temos, então, 5 grupos de 5 palitos, restando 4.

Dos 4 palitos que restam, separamos 1 (um) palito. Tudo isto mentalmente.

Esquematizando, para melhor visualizar, temos a seguinte situação:

III IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII I

Então, o primeiro jogador retira 3 palitos, e daí em diante, seja qual for a quantidade que o segundo retirar, o primeiro retirará o que faltar para 5.

Logicamente, o primeiro jogador vencerá.

Outras variantes deste jogo podem ser feitas, a critério da imaginação do professor que quiser utilizá-lo como um bom estímulo para ensinar ou recordar contas de divisão.

Impertinência:

Você só ensina ou também trabalha?

A teoria matemática do jogo de Nim

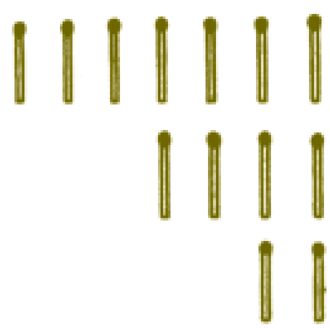
Inez Freire Raguenet

Márcia Kossatz de Barrêdo

O Jogo

Em sua forma original, NIM é um jogo para dois participantes, que chamaremos de jogador *A* e jogador *B*. Colocamos sobre uma mesa 3 pilhas de objetos de qualquer tipo, ou então, usamos palitos de fósforo. Dispomos sobre a mesa 3 filas com um número arbitrário de palitos, sendo que, no início, duas filas não podem ter o mesmo número de palitos.

Por exemplo:



1ª fila (7 palitos)

2ª fila (4 palitos);

3ª fila (2 palitos).

Jogar NIM consiste em, após retiradas sucessivas dos palitos de cima da mesa, alternando de jogador para jogador, conseguir deixar o último palito para seu oponente retirar, pois a derrota se dá para aquele que retira o último palito. Estas retiradas só podem ser feitas em uma das filas de cada vez, e o jogador precisa tirar pelo menos um palito. Também é permitido que o jogador retire todos os palitos de uma fila em sua vez de jogar.

O fato interessante é que se na sua vez de jogar você conseguir deixar uma certa configuração de palitos na mesa – de modo que, se depois disso você jogar sem erro, seu oponente não possa ganhar, independentemente das jogadas que ele faça –, esta configuração será chamada uma combinação segura.

Em linhas gerais, a demonstração deste fato consiste em mostrar que se o jogador *A* deixa uma "combinação segura" de palitos na mesa, então *B*, no seu próximo movimento, seja ele qual for, não poderá deixar uma combinação segura. Além do mais, após o movimento de *B*, o jogador A novamente poderá deixar uma nova combinação segura e continuar o jogo.

Como determinar a combinação segura

Suponha que a primeira fila tenha *P* palitos, a segunda *S*, e terceira, *T* palitos. Escreva estes números *P*, *S* e *T* em notação binária e disponha-os em 3 linhas horizontais de tal modo que as casas das unidades se correspondam.

Por exemplo:

$$P = 9 \text{ palitos, } S = 5 \text{ palitos, } T = 12 \text{ palitos}$$

Teremos: $9 = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2 + 1.2^0$, isto é, $P = 1001$ em notação binária.

Usando o mesmo raciocínio, temos, em notação binária, $S = 101$ e $T = 1100$.

Disposição:

P	1001
S	101
T	1100

casa das unidades

Se a soma dos algarismo das casas correspondentes de *P*, *S* e *T* for igual a 0 ou 2 (i.e., congruente a 0 mod 2) então esta será uma combinação segura.

No caso:

$$\begin{array}{lr} P & 1001 \\ S \;+ & 101 \\ T & 1100 \\ \hline & 2202 \end{array}$$

(está é uma combinação segura)

Observe que, dados dois números em notação binária, podemos determinar um terceiro que dê uma combinação segura, e de maneira única. Basta escrevê-lo de tal forma que, ao somarmos as casas correspondentes, obtenhamos 0 ou 2.

Por exemplo: dados, já em notação binária, $P = 100$ e $S = 11$; podemos determinar T da seguinte forma:

P		100
S	+	11
T		???
		XYZ

onde X, Y, Z só podem ser 0 ou 2. Neste caso, por uma fácil verificação, $T = 111$.

Não esqueça que T é dado em notação binária, logo, só pode ter os algarismos 0 ou 1.

Em outras palavras, se P, S e T formam uma combinação segura, então quaisquer dois deles determinam o terceiro.

Observações:

1) Como toda regra tem sua exceção, também são combinações seguras:
   a) $P = 1$, $S = T = 0$;
   b) $P = S = T = 1$.
2) Uma combinação segura particular é aquela em que duas filas têm o mesmo número de palitos ($P = S$), e a terceira não tem nenhum ($T = 0$), com exceção de $P = S = 1$ e $T = 0$.

Enunciaremos agora os dois teoremas que ensinam você a ganhar.

Como ganhar no jogo de NIM

Teorema 1: Se o jogador A deixa uma combinação segura na mesa, então B não conseguirá deixar outra combinação segura na sua vez de jogar.

A demonstração é fácil: basta ver que B pode mexer em apenas uma fila de palitos e tem que retirar pelo menos um. Sabendo-se que, dados os números de palitos de duas filas, determina-se unicamente o número de palitos da terceira e considerando-se a A deixou uma combinação segura, qualquer movimento que B faça desmanchará esta combinação segura. Logo, o jogador B não poderá deixar uma nova combinação segura.

Teorema 2: Se o jogador A deixa uma combinação segura na mesa e B retira palitos de uma certa fila, então A poderá recompor uma combina ção segura retirando palitos de uma das filas restantes.

Antes da demonstração, veja um exemplo. Suponha que *A* deixou a seguinte combinação segura na mesa:

9 palitos		P		1001
5 palitos	ou seja	S	+	101
12 palitos		T		1100
				2202

(é uma combinação segura)

Suponha, também, que *B* retira 2 palitos da 1ª fila. Restam:

7 palitos		P		111
5 palitos	ou seja	S	+	101
12 palitos		T		1100
				1312

(não é uma combinação segura)

Se o jogador *A* quer deixar uma combinação segura, é claro que ele terá que retirar palitos da 3ª fila, que contém 12 palitos. Vamos determinar o número de palitos que devem restar na 3ª fila (*T'*) para que *A* consiga uma combinação segura (observe que *T'* tem que ser menor que *T*).

Dados:

$$\begin{array}{lcr} P & & 111 \\ S & + & 101 \\ T & & ??? \\ \hline & & XYZ. \end{array}$$

Ora, para que *PST* seja uma combinação segura, temos as seguintes possibilidades para *XYZ*:

XYZ = 000 (incompatível com o problema)

XYZ = 202 (incompatível também)

$XYZ = 220$ (idem)

$XYZ = 200$ (idem)

.
.
.

e outras.

Prosseguindo neste raciocínio, concluímos que o único valor de XYZ compatível com o problema é 222; portanto, $T' = 0010$, ou seja, 2 palitos. Assim, o jogador A tem que retirar 10 palitos da 3ª fila para obter novamente uma combinação segura.

Agora, a demonstração do teorema 2.

Primeiramente, suponha que o jogador A deixou na mesa uma combinação segura. Daí, B escolhe uma das filas, por exemplo, a primeira, e retira um certo número de palitos dela. Observe que, quando um número diminui, a mudança que ocorre em sua representação binária, olhando da esquerda para a direita, é algum 1 que passa para 0 (caso contrário, o número estaria aumentando). Considere este primeiro algarismo no qual ocorre mudança de 1 para 0. Decorre do fato de o jogador A ter deixado uma combinação segura, que na casa correspondente ao algarismo que sofreu mudança, apenas um número dos dois restantes (P, S ou T) vai conter o algarismo 1 (nunca os dois ao mesmo tempo).

Agora, A escolhe este número e coloca zero na casa onde o algarismo 1 estiver, tomando o cuidado de alterar ou não os algarismos à direita desta casa neste mesmo número (de 0 para 1, ou de 1 para 0) de modo a obter novamente uma combinação segura.

Para ilustrar:

P		1110			1110			10
S	+	0100	B joga	+	100	A joga	+	100
T		1010	$\rightarrow$		110	$\rightarrow$		110
		2220			1320			220

(combinação segura) (combinação segura)

O que aconteceu na verdade foi que o jogador A deixou na mesa o número de palitos cuja representação binária é o número resultante das alterações feitas por ele ao armar uma nova combinação segura.

No caso:

14 palitos		14 palitos		2 palitos
4 palitos	*B* joga	4 palitos	*A* joga	4 palitos
10 palitos	→	6 palitos	→	6 palitos
(combinação segura)				(combinação segura)

Qualquer que seja a próxima jogada de *B*, por um raciocínio análogo, não impedirá *A* de fazer uma nova combinação segura, retirando os palitos de maneira conveniente. Deste modo, o jogador *A* fatalmente ganhará o jogo, observando as seguintes propriedades e estratégias.

I – Suponha que o jogador *A*, ao deixar uma combinação segura na mesa, retira todos os palitos de uma certa fila. Então, certamente as outras duas filas terão o mesmo número de palitos.

II – Suponha que o jogador *B* retira todos os palitos de uma das filas. Então, as duas outras terão números diferentes de palitos e, assim, o jogador *A* poderá igualá-las, deixando na mesa uma combinação segura.

III – Suponha que, anos após alguma das filas ter seu número de palitos reduzido a zero, o jogador *B* deixe uma das filas restantes com apenas 1 palito. Então, basta A tirar todos os palitos da outra fila, deixando que aquele último seja retirado por *B* e, conseqüentemente, fazendo com que *B* perca o jogo.

IV – Suponha que, tendo uma das filas seu número de palitos reduzido a zero, o jogador *B* "zera" outra fila. Então, basta *A* deixar apenas um palito na fila restante, fazendo também com que *B* perca o jogo.

V – Suponha que o jogador *A* deixou alguma fila com apenas um palito. Então, ocorre uma das três possibilidades:

a) as duas outras filas têm um palito cada uma;

b) as duas filas não têm nenhum palito;

c) as duas outras filas têm números diferentes de palitos uma da outra, as quais, por sua vez, não serão 0 ou 1 simultaneamente.

Resumindo: O jogador que conseguir manter uma combinação segura na mesa ganha o jogo. Assim sendo, se a primeira disposição dos palitos na mesa formar uma combinação segura, a primeira pessoa a jogar vai desmanchar esta combinação segura. Logo, o segundo a jogar terá a sorte de poder recompor uma combinação segura e, se não errar, ganha o jogo. Da mesma forma, se a primeira disposição dos palitos na mesa não formar uma combinação segura, o primeiro a jogar poderá e, novamente, se não errar, ganha o jogo.

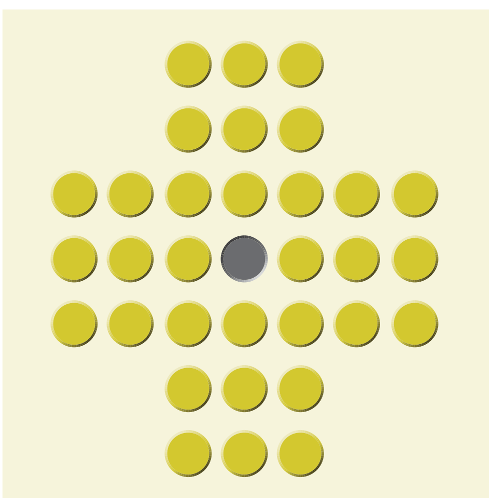
Portanto, ganhar (ou não) depende da probabilidade de se ter uma combinação segura na primeira disposição dos palitos na mesa. E, também, de entender este artigo.

Ref.: Charles L. Bouton – *Annals of Mathematics*, ser. II, vol. 3, Nº 1, Oct. 1901, p. 35 (Nim, a game with a Complete Mathematical Theory).

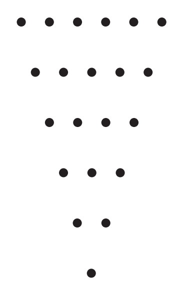
Resta-um, Resta-zero, e a operação Nim

Carlos Augusto Isnard

Instituto de Matemática Pura e Aplicada



Uma variante do jogo do NIM é praticada nas praias brasileiras, com os palitos substituídos por pontos marcados na areia que vão sendo apagados pelos jogadores. O jogo se inicia com seis filas horizontais que tem respectivamente 6, 5, 4, 3, 2 e 1 pontos.



Este jogo é, às vezes, chamado de *Resta-um.*

Os praticantes do jogo conhecem de memória as “combinações seguras” como P, S, T iguais, 1, 2, 3 ou 1, 4, 5 ou 3, 5, 6 ou n, n, 0 ($n \geq 2$) etc. O artigo anterior apresenta uma interessante caracterização matemática dessas combinações seguras, através da representação dos números na base 2.

Mesmo havendo uma quantidade arbitrária de filas, a disposição na base 2, descrita pelos autores, serve ainda para caracterizar as combinações seguras: a combinação será segura quando a soma dos algarismos de cada casa for par, isto é, quando cada coluna vertical tiver uma quantidade par de algarismos 1. Existe uma exceção a esta regra, que ocorre quando nenhuma fila horizontal tiver mais do que um ponto: uma quantidade ímpar de filas com um só ponto é obviamente uma combinação segura para o Resta-um.

O *Resta-zero* é outro jogo, cujas regras são as mesmas do Resta-um, exceto pela definição do vencedor: na regra do Resta-zero o vencedor é quem conseguir apagar o último ponto. As combinações seguras do Resta-zero têm uma caracterização simples: são as mesmas do Resta-um, sem a exceção desagradável no caso em que nenhuma fila tem mais do que um ponto. É óbvio que uma quantidade par de filas de um só ponto é uma combinação segura para o Resta-zero.

Existe uma interessante operação comutativa e associativa relacionada a esses jogos, a operação Nim, definida no conjunto $\mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}$ por $P \oplus S = T \Leftrightarrow P, S, T$ é combinação segura para o Resta-zero (o que significa que é também combinação segura para o Resta-um, se $P \geq 2$ ou $S \geq 2$).

Temos: $n \oplus 0 = n = 0 \oplus n$ e $n \oplus n = 0$, para qualquer $n \in \mathbf{Z}^+$, de maneira que na operação, $\mathbf{Z}^+$ é um grupo comutativo com identidade 0 e tal que o inverso de cada n é o próprio n (o grupo Nim).

Havendo m filas com $p_1, p_2, ..., p_m$ pontos, então essa combinação é segura para o Resta-zero se e somente se:

$p_m = p_1 \oplus ... \oplus p_{m-1}$, ou seja, se e somente se $p_1 \oplus ... \oplus p_m = 0$.

Por exemplo 2, 3, 4, 5 é combinação segura (para o Resta-zero, logo também para o Resta-um), porque $2 \oplus 3 \oplus 4 = 5$ (cálculo: $2 \oplus 3 = 1$ e $1 \oplus 4 = 5$, pois 1, 2, 3 e 1, 4, 5 são combinações seguras conhecidas).

Da mesma maneira 1, 5, 4, 3, 2, 1 é combinação segura para ambos os jogos porque $1 \oplus 5 \oplus 4 = 0$ e $1 \oplus 3 \oplus 2 = 0$ (pois 1, 4, 5 e 1, 2, 3 são combinações seguras).

A seguinte regra é útil quando os números são muito grandes: Se $P < 2^k$, então $2^k + P = 2^k \oplus P$ ($P, k \in \mathbf{Z}^+$). Em conseqüência, se $P < 2^k$ e $S < 2^k$ então $2^k + P$, $2^k + S$, T é combinação segura, se e somente se P, S, T é combinação segura ($P, S, T, k \in \mathbf{Z}^+$).

Como aplicação, algumas computações Nim:

19, 21, 6 é combinação segura porque

$$19 \oplus 21 = (16 \oplus 3) \oplus (16 \oplus 5) = 3 \oplus 5 = 6;$$

podemos calcular $3 \oplus 5 = (2 \oplus 1) \oplus (4 \oplus 1) = 2 \oplus 4 = 6$ (usamos várias vezes $2^k \oplus P = 2^k + P$ se $P < 2^k$, $P, k \in \mathbf{Z}^+$).

No filme *O ano passado em Marienbad* o jogo aparece várias vezes com cartas de baralho no lugar de pontos ou palitos, iniciando-se com a combinação 7, 5, 3, 1, que é uma combinação segura porque

$$1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 2 \oplus 5 \oplus 7 = 2 \oplus (4 \oplus 1) \oplus (4 \oplus 3) = 2 \oplus 1 \oplus 3 = 0,$$

ou porque na base 2 temos

$$\begin{array}{ccr} 7 & : & 111 \\ 5 & : & 101 \\ 3 & : & 11 \\ 1 & : & 1 \\ \hline & & 224. \end{array}$$

O jogo de Euclides

João Bosco Pitombeira

> O momento ideal para aplicação desta atividade é durante o estudo do máximo divisor comum, embora possa ser utilizada para reforço dos cálculos aritméticos. A compreensão do algoritmo de Euclides para determinação do MDC é a inspiração para o jogo. Pode-se, depois da compreensão do jogo, propor perguntas do tipo: Sempre se chegará ao zero? Se um dos números é zero, o outro será o quê?
>
> Quando o aluno perceber que a resposta a essa última questão é "o MDC do par inicial", ele ficará curioso para compreender o processo. Então é interessante salientar a proximidade com o algoritmo de Euclides.

Descrição do jogo

São dois os jogadores – cada um escolhe, secretamente, um número natural não-nulo. Suponhamos que um jogador escolheu o número 31, e o outro jogador, o número 7. Um dos jogadores é sorteado para iniciar o jogo. Ele receberá o número escolhido pelo colega e deverá subtrair do maior número, 31, um múltiplo não-nulo do menor, ($k7 = 7$, 14, 21 ou 28) de modo que o resultado ainda seja positivo. O segundo jogador receberá o novo par de números $31 - k7$, 7 e repetirá o processo, subtraindo do maior número um múltiplo do menor, e assim por diante.

Ganhará o jogo quem obtiver primeiro o número 0.

Especificando: os números escolhidos são 31 e 7. O 1º jogador poderá devolver para o colega os pares de números:

7 e $31 - 7 = 24$;

7 e $31 - 14 = 17$;

7 e $31 - 21 = 10$ ou

e $31 - 28 = 3$.

Suponhamos que ele devolva o par 7 e 10.

Nesse caso, o segundo jogador só terá uma alternativa: responder com o par de números 7 e 3.

Será a vez, novamente, do primeiro jogador que poderá escolher: 3 e 4 ou 3 e 1.

Se jogar {3, 1}, o segundo jogador jogará {1, 0} e será o vencedor.

Se jogar {3, 4}, o segundo jogador será obrigado a jogar {3,1} e, na jogada seguinte, o primeiro jogador ganhará o jogo.

Euclides?

Não é difícil ver, e o professor pode chamar a atenção dos alunos para esse fato, que o jogo termina com o par $\{n, 0\}$, onde n é o maior divisor comum dos dois números escolhidos inicialmente.

De fato, se denotarmos por a e b os números escolhidos e um número dividir a e b, este número também dividirá $a - kb$ e b. Reciprocamente, se um número dividir $a - kb$ e b, este número também dividirá a e b. Portanto, os divisores comuns de a e b e os de $a - kb$ e b são os mesmos e, conseqüentemente,

$$\text{MDC }(a,b) = \text{ MDC }(a - kb,\ b) = \mathbf{...} = \text{MDC }(n,\ 0) = n.$$

Também não é difícil ver por que o jogo se chama *jogo de Euclides* – basta observar o algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum de dois números:

	4	**2**	**3**
31	**7**	**3**	**1**
3	**1**	**0**	

onde, em cada passagem, do maior número subtrai-se um múltiplo do menor (no jogo, esse múltiplo não é necessariamente o maior possível).

A estratégia para ganhar

Como foi feito, para o jogo do NIM, apresentaremos resultados matemáticos do jogo de Euclides, o que permitirão dizer quem vencerá o jogo, caso ambos os jogadores joguem corretamente.

Surpreendentemente aparecerá o número áureo

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618,$$

e o seu papel será decisivo para definir o vencedor do jogo – um jogo que só envolve números inteiros! (Esse número r aparece ao dividirmos um segmento na razão áurea, ao estudarmos os números de Fibonacci, e em outras partes da Matemática.)

Nomenclatura

Dado um par $\{a, b\}$, com $a > b$, os pares $\{a - b, b\}$, $\{a - 2b, b\}$, ..., $\{a - qb, b\}$, com $a - qb \geq 0$, chamam-se *pares derivados de* $\{a, b\}$. Assim, $\{24{,}7\}$, $\{17{,}7\}$, $\{10{,}7\}$, $\{3{,}7\}$ são os pares derivados de $\{31{,}7\}$.

Se $a - qb \geq 0$ e $a - (q + 1)b < 0$, $\{a - qb, b\}$ chama-se *par derivado mínimo* de $\{a, b\}$. No exemplo, $\{3{,}7\}$ é o par derivado mínimo de $\{31{,}7\}$. Observe que, dentre todos os pares derivados de um par $\{a, b\}$, com $a > b$, os números do par derivado mínimo são b e o resto da divisão de a por b.

Se $\{a - qb, b\}$ for o par derivado mínimo, diremos que o par $\{a - (q - 1)b, b\}$ *é o par anterior ao par derivado mínimo.*

Observe, mais uma vez, o exemplo. Dado o par $\{31{,}7\}$, o 1º jogador tem apenas duas opções significativas:

- ele escolhe o par derivado mínimo $\{3, 7\}$;

ou

- ele escolhe o par anterior ao par derivado mínimo, isto é, $\{10, 7\}$, obrigando o adversário a jogar $\{3, 7\}$.

Qualquer outra escolha daria estas mesmas duas opções ao adversário.

Qual das duas é a melhor?

É possível provar que se um jogador receber um par de números $\{a, b\}$ com,

$$1 < \frac{a}{b} < r$$

naquela jogada ele não poderá ganhar o jogo e terá como única opção devolver o par

$$\frac{b}{a-b} > r.$$

$\{a - b, b\}$ que tem a razão

Portanto é sempre vantajoso para um jogador escolher aquele par cuja razão é menor do que 2 e passá-lo ao adversário. Este, na sua vez, não ganhará o jogo e será obrigado a devolver um par com razão maior do que 2.

E, agora, o fato decisivo:

Se um jogador receber um par $\{a, b\}$ com $\dfrac{a}{b} > 2 > r$

ele terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória, pois poderá sempre impedir que o adversário ganhe o jogo no lance seguinte. Como o jogo tem um número finito de lances, necessariamente haverá uma vez em que o jogador receberá um par de números com um número múltiplo do outro, o que lhe dará a vitória.

Em resumo: Se o jogo começar com um par $\{a, b\}$ com $a > b$, o primeiro jogador terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória se e somente se

$$\frac{a}{b} > r$$

ou se a e b forem iguais. Nos casos restantes, o segundo jogador é quem terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória.

Jogos de Sperner

Jaime Poniachik

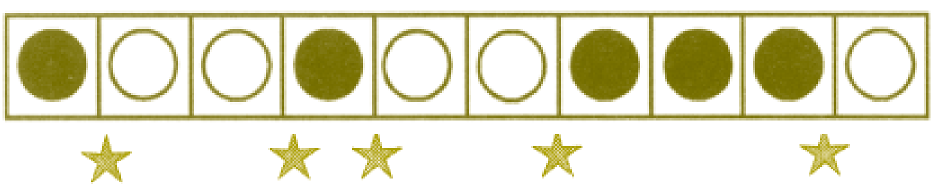
Argentina

Este jogo de fichas brancas e pretas pode ser utilizado desde a 5ª série para incentivar contagem e identificação de números pares e ímpares.

Pode-se levar os alunos a discutirem estratégias de vitória e possíveis generalizações do jogo são apresentadas.

1. Impactos

Em uma tira com n casas, dois jogadores alternam-se, colocando nas casas uma ficha de cada vez. Um coloca fichas brancas, o outro, pretas, sempre em casas que estiverem vazias. A partida acaba quando não existirem mais casas vazias. Contam-se, então, os "impactos". Há impacto quando duas casas vizinhas tiverem fichas de cores distintas. Se, no final, a quantidade de impactos for ímpar, o Branco ganha a partida; se for par, ganha o Preto. O diagrama mostra uma partida terminada. Os impactos estão marcados com estrelas. Houve 5 impactos. Branco ganhou.



O Branco começa. Qual é a estratégia vencedora?

Resposta

O jogo dos impactos não é mais do que a apresentação lúdica de um resultado matemático bastante conhecido, o "Lema de Sperner", aplicado, em nosso caso, a um segmento. Diz o lema:

Em um segmento, dividido em segmentos menores, marcamos o extremo esquerdo com 0, o direito com 1 e cada ponto de divisão intermediá rio com 0 ou 1. Dizemos que um segmento é “bom”, se os seus extremos estiverem marcados com números distintos.

a) Demonstra-se que o número de segmentos bons é ímpar.

b) Demonstra-se que os segmentos bons do tipo (0, 1) são um a mais do que os segmentos bons do tipo (1, 0).

A demonstração é muito simples e engenhosa:

Contam-se os segmentos bons, indo da esquerda para a direita. O 1 que estiver mais à esquerda fecha o primeiro segmento bom que é do tipo (0, 1). O próximo segmento bom deverá ser do tipo (1, 0).

E, sucessivamente, os segmentos bons irão se alternando entre os de um e de outro tipo. O último será do tipo (0 1).

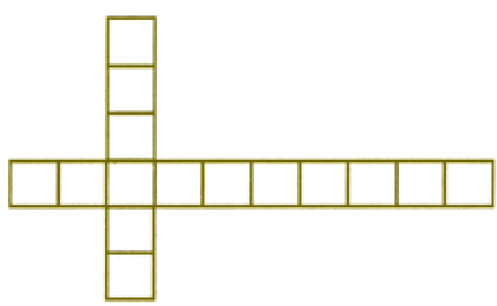
Daí concluí-se que a quantidade de segmentos bons é ímpar, e que há um segmento a mais do tipo (0,1) que o do tipo (1, 0).

Observações: Se os extremos do segmento inicial receberem ambos o mesmo rótulo, a quantidade de segmentos bons será par e haverá tantos segmentos de um tipo quanto do outro.

Voltemos ao jogo dos impactos. Para ganhar, o Branco apenas precisa assegurar que os extremos tenham fichas de cores distintas. Isso é fácil: ele joga fichas, à vontade, nas casas internas e, assim que o Preto colocar uma ficha em uma das extremidades, o Branco coloca sua ficha na outra extremidade.

2. Impactos em duas carreiras

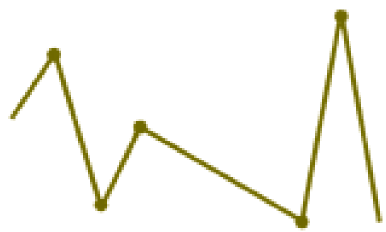
As mesmas regras poderiam ser usadas em tabuleiros mais complexos. Por exemplo:



Qual é a estratégia para ganhar?

3. Corolário do lema de Spener

Uma linha contínua que começa subindo e termina descendo tem um número ímpar de extremos (máximos e mínimos).

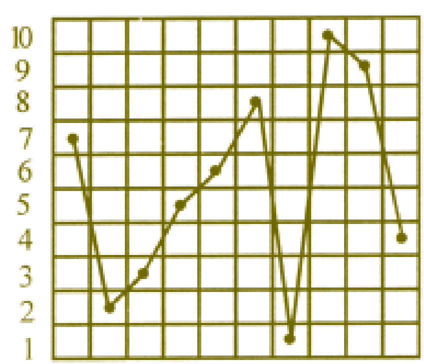


4. Jogo do sobe-desce

Numa tira de *n* casas escrevem-se os números 1, 2, 3, ..., *n* da seguinte maneira: cada jogador escreve um número por vez numa casa livre, número que até então não tenha sido usado. A partida termina quando todas as casas estiverem preenchidas. Se resultar uma quantidade ímpar de extremos, a vitória será do primeiro jogador; se a quantidade for par, ganhará o segundo. O diagrama mostra uma partida acabada:

7	2	3	5	6	8	1	10	9	4
	★				★	★	★		

Jogando em um tabuleiro quadriculado, a partida anterior ficaria assim:

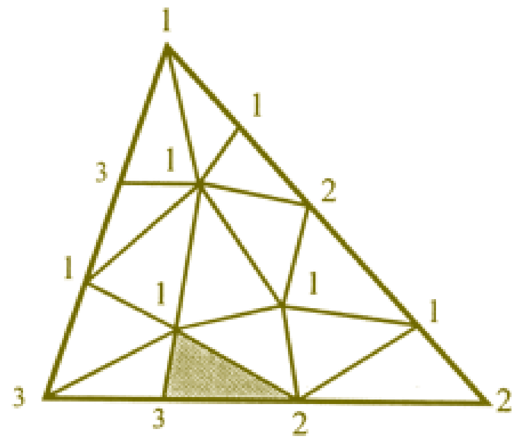


Qual a estratégia para ganhar?

5. Notícia histórica

O Lema de Spener completo refere-se à triangulação de triângulos, equivalente ao que foi nossa segmentação de segmentos. Ele diz:

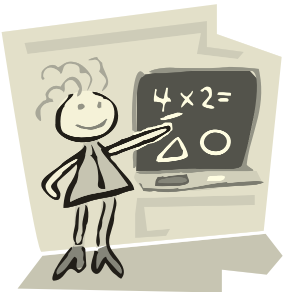
Um triângulo, cujos vértices estão marcados com os números 1, 2 e 3, é dividido em triângulos, e os novos vértices são numerados com esses três algarismos, respeitando a seguinte condição de fronteira: todo novo vértice que cair em um lado do triângulo maior levará um dos algarismos dos extremos desse lado. Demonstra-se que pelo menos um dos triângulos da partição está numerado com três algarismos distintos. E mais, o número total desses triângulos é ímpar.



A partição deve ser tal, que dois triângulos pequenos quaisquer ou não têm ponto comum, ou somente têm um vértice comum, ou têm um lado comum.

Emannuel Sperner (1905-1980) foi um matemático alemão, que em 1928 demonstrou o lema da partição do triângulo (e, em geral, do simplexo n-dimensional). Um lema é, em Matemática, uma proposição simples que antecede um teorema. O de Sperner antecede o teorema do ponto fixo.

(Para maiores detalhes e extensões veja Yu Shashkin. *Pontos fixos*. Editora Mei, Moscou, 1991.)



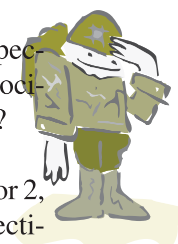
...probleminhas da seção PROBLEMAS

1. Um senhor de idade deixou o seguinte testamento:
"Deixo 1/3 da minha fortuna para minha única filha e o restante para a criança que ela está esperando, se for homem; deixo 1/2 da minha fortuna para minha única filha e o restante para a criança que ela está esperando, se for mulher."
Após sua morte nascem gêmeos: um casal. Como deve ser dividida a fortuna?

2. Eu tenho três bolas: *A*, *B* e *C*. Pintei uma de vermelho, uma de branco e outra de azul, não necessariamente nesta ordem. Somente *uma* das seguintes afirmações é verdadeira:
A é vermelha
B não é vermelha
C não é azul
Qual é a cor de cada bola?

3. "Embora eu esteja certo de que meu relógio está adiantado 5 minutos, ele está na realidade, com 10 minutos de atraso. Por outro lado, o relógio do meu amigo está realmente 5 minutos adiantado. Nós marcamos um encontro às 10 horas e cada um de nós planeja chegar pontualmente e em cima da hora. Quem chegará em primeiro lugar? Depois de quanto tempo chegará o outro?

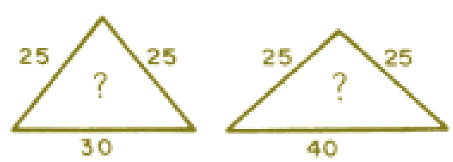
4. Pedro e Paulo apostam uma corrida:
Pedro corre a metade do tempo e anda a outra metade.
Paulo corre a metade da distância e anda a outra metade.
Se ambos correm e andam, respectivamente, com as mesmas velocidades, quem chegará primeiro?



5. Qual é o número que dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 tem para resto, respectivamente 1, 2, 3, 4 e 5?

6. Numa família, cada filha (moça) tem o mesmo número de irmãos e irmãs e cada filho homem tem duas vezes mais irmãs do que irmãos. Quantas filhas (moças) e filhos (homens) há nesta família?

7. Qual é a área maior?



8. A média das idades dos elementos de uma equipe de uma feira de ciências é 14,625. Qual é o menor número de elementos que podem constituir a equipe?

9. No Jardim dos Números, os algarismos a e b passeavam a uma velocidade constante. Às 14:00 h já tinham percorrido ***ab*** metros, às 14:42 h ***ba*** metros e às 15:00 h ***a0b*** metros. Sabendo que no número $a0b$ o algarismo das dezenas é zero, mas o das centenas não, a que horas começou o passeio?

10. Um destacamento de soldados precisa atravessar um rio muito profundo e sem pontes. Eles pedem ajuda a dois meninos que estão passando pelo rio num barco. Porém, o barco é tão pequeno que nele só cabem os dois meninos ou um soldado de cada vez. Como eles fizeram para todos os soldados atravessarem o rio?

11. Num círculo formado por 10 pessoas cada pessoa escolhe um número e revela esse número aos seus vizinhos no círculo. Cada pessoa diz em voz alta a soma dos números dos seus 2 vizinhos. A figura mostra os números ditos em voz alta. Qual foi o número escolhido pela pessoa que disse o número 7?

12. Num hotel para cães e gatos 10% dos cães julgam que são gatos e 10% dos gatos julgam que são cães. Após cuidadosas observações conclui-se que 20% de todos os hóspedes pensam que são gatos e que os restantes pensam que são cães. Se no hotel estão hospedados 10 gatos, quantos são os cães hospedados?

13. No ano que vem fevereiro terá cinco domingos. Qual foi o ano em que isso aconteceu pela última vez?

14. Num cercado pintinhos estão perseguindo besouros de 6 patas. Se o total de patas no cercado é 140, as quantidades dos besouros e dos pintinhos são dadas por números primos e há pelo menos um besouro para cada pintinho, quantos são os besouros?

15. Em um torneio de tênis participam n jogadores. Todos os jogos são entre dois jogadores e todos são eliminatórios. Quantas partidas serão jogadas até ser definido o campeão?

16. Calcule, sem usar calculadora, a área sombreada, sendo:
$a = 0{,}8667899776$
e $b = 0{,}1332100224$.

17. O produto de dois números que não são primos entre si é 6 435. Qual é o máximo divisor comum desses dois números?

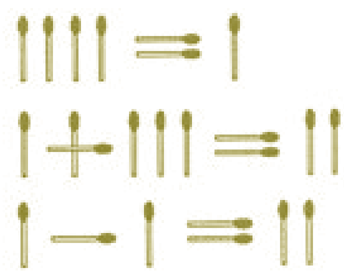
18. O Asterix e o seu companheiro Obelix estão a explorar um país muito pequeno no qual apenas existe uma estrada (em linha reta) que liga as três cidades que pretendem visitar: *Amix*, *Berlix* e *Celtix*. Ao chegarem à cidade de *Amix* avistam dois sinais com as seguintes indicações: "*Berlix* 5 km" e "*Celtix* 7 km". Caminham mais alguns quilômetros e chegam a *Berlix*, onde, com espanto, Obelix encontra dois sinais com as indicações: "*Amix* 4 km" e "*Celtix* 6 km". Ao comentar com Asterix o sucedido, este responde-lhe: "Não te preocupes! Sabe-se que numa das cidades todos os sinais têm indicações erradas, noutra todas as indicações são corretas e na outra uma indicação é correta e a outra errada". Por fim, ao chegarem a *Celtix* avistam mais dois sinais: "*Amix* 7 km" e "*Berlix* 3 km". Quais são as verdadeiras distâncias entre as três cidades?

19. Joaquim deve transportar alguns sacos para um depósito, recebendo R$ 0,20 por quilo transportado. Os sacos podem pesar 30, 40 ou 50 kg, e ele demora 8, 12 ou 20 minutos para transportá-los, respectivamente. Qual é a quantia máxima que o Joaquim poderá ganhar em exatamente uma hora de trabalho?

20. Para fazer de cabeça: Se uma garrafa e a sua tampa custam R$110,00 e a garrafa custa R$100,00 a mais que a tampa, quanto custa a tampa?

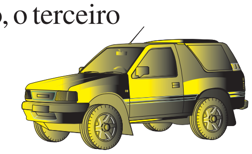
21. Três atletas disputavam o melhor tempo para uma corrida de 100 metros. Enquanto um corria, outro cronometrava. No final, o cronômetro de Marcelo registrava 10,7 segundos, o de Roberto, 10,8 segundos e o de Eduardo, 10,9 segundos. Eduardo deu os parabéns ao vencedor. Qual foi a classificação?

22. Redesenhar as figuras ao lado, mexendo apenas um palito, para tornar corretas as igualdades.



23. Vovó tem 17 netos entre meninos e meninas. Dos meninos, 4/9 têm olhos azuis. Quantas são as meninas?

24. Quando passeavam numa cidade, três estudantes de Matemática observaram que o condutor de um automóvel infringiu o código de estrada. Nenhum dos estudantes se recordava do número de matrícula (que tinha quatro algarismos), mas cada um deles notou uma particularidade de tal número. Um deles notou que os dois primeiros algarismos eram iguais. O segundo reparou que também os dois últimos eram iguais. E, por último, o terceiro



garantia que o número de matrícula era um quadrado perfeito.

É possível determinar o número de matrícula do automóvel conhecendo-se apenas esses dados? Justifique sua resposta.

25. Antônio e Bento, dois gêmeos, seguiam o leito de uma ferrovia e começaram a atravessar uma ponte estreita na qual havia espaço apenas para o trem. No momento em que completavam $2/5$ do percurso da ponte, ouviram o trem que se aproximava por trás deles. Antônio começou a correr de encontro ao trem, saindo da ponte praticamente no instante em que o trem entrava. Bento correu no sentido oposto a Antônio, conseguindo sair da ponte praticamente no instante em que o trem saía. Quando os irmãos se reencontraram, passado o sufoco, o irmão que gostava de Matemática (o outro amava) observou:

Corremos à velocidade de 15 *km por hora, e portanto já sei calcular a velocidade do trem!*

Calcule a velocidade do trem. Justifique sua resposta!

26. Determine o número fantasma de seis algarismos que está escondido na última linha. Nas outras linhas há também números de seis algarismos e ao lado de cada um deles está anotado quantos algarismos há em comum com o número fantasma: são *B* (bom) se estão colocados na mesma posição no número fantasma e *R* (regular) se estão no número fantasma, mas em posição diferente.

	B	*R*
1 3 5 2 4 6	2	0
5 7 9 6 8 0	2	2
2 6 0 4 8 1	2	2
	6	0

27. Encontre o menor número *ABCDEF*, formado pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repetição, tal que o número *AB* seja divisível por *B*, o número *BC* seja divisível por *C*, *CD* seja divisível por *D*, *DE* seja divisível por *E*, e *EF* seja divisível por *F*.

28. Qual é a altura do gigante, sabendo-se que a sua cabeça mede 30 cm de comprimento, incluindo naturalmente o pescoço. As pernas são duas vezes mais compridas que a cabeça e seu meio tronco, e o sujeito todo é um metro mais comprido que a cabeça e as pernas juntas.

29. Como o médico me recomendou caminhadas, todo dia de manhã dou uma volta (com velocidade constante) na quadra em que resido. Minha mulher aproveita para correr (com velocidade constante) em volta do quarteirão. Saímos juntos e chegamos juntos. Ela percorre a quadra no mesmo sentido que eu e me ultrapassa duas vezes durante o percurso. Se ela corresse no sentido contrário ao meu, quantas vezes ela cruzaria comigo?

30. Um industrial produz uma máquina que endereça 500 envelopes em 8 minutos. Ele deseja construir mais uma máquina de tal forma que ambas, operando juntas, endereçarão 500 envelopes em 2 minutos. Determine o tempo que a segunda máquina sozinha deve gastar para endereçar 500 envelopes.

Respostas dos problеminhas

1. 1/4 para a filha; 1/4 para a neta; 1/2 para o neto.

2. *A*: azul;
B: vermelha;
C: branca.

3. Meu amigo; depois de 20 minutos.

4. Pedro; ele percorre, correndo, mais do que a metade da distância.

5. 59 (chamando o número procurado de n, $n + 1$ será divisível por 2, 3, 4, 5 e 6).

6. 4 moças e 3 homens.

7. Altura do triângulo de base 30: 20; altura do triângulo de base 40: 15. As áreas são iguais.

8. 8.

9. 13:48 h.

10. O menino *A* fica na margem oposta á margem na qual estão os soldados e o menino *B* leva o barco até os soldados. O primeiro soldado atravessa o rio e o menino *A* traz o barco de volta. Os dois meninos atravessam o rio, o menino *A* fica, e o menino *B* leva novamente o barco até os soldados. O segundo soldado atravessa o rio e ...

11. 1.

12. 70.

13. 1976.

14. 19.

15. $n - 1$ jogadores devem ser eliminados, logo são necessárias $n - 1$ partidas.

16. 0,7335799552.

17. 3.

18. *Amix-Berlix*: 5 km
Berlix-Celtix: 2 km

19. R$ 44,00.

20. R$ 5,00.

21. 1º Roberto,
2º Eduardo,
3º Marcelo.

22. II – I = I ; I – III = – II e II – I = I.

23. 8.

24. Sim, é 7 744.

25. 75 km/h.

26. 170 289.

27. 361 524.

28. 2,9 m.

29. 4.

30. 8/3 min.