Capítulo 5

Álgebra

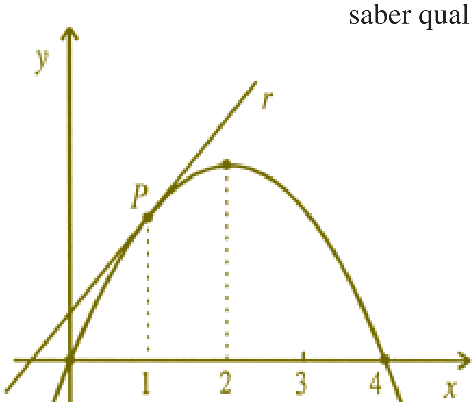
Um professor em apuros

Jesús A. Pérez Sánchez

Introdução

Naquela semana o professor Beremis estranhou a demora dos seus alunos na entrega dos exercícios de Matemática. Quando finalmente eles os apresentaram, seus rostos não refletiam muito entusiasmo.

Ao perguntar sobre o motivo da demora, o professor Beremis inteirou-se de que não tinham resolvido um dos problemas, por falta de dados. O professor viu-se numa situação desagradável, pois era muito cuidadoso na preparação dos exercícios e, embora não tivesse conferido todos os detalhes dos problemas, tinha certeza de ter fornecido os elementos necessários para sua solução. Logo, quis saber qual era a dificuldade. Tratava-se do seguinte problema:



Dada a parábola da figura, encontrar a interseção da reta r, tangente à curva em P, com o eixo O_X.

O argumento da turma era que somente com as informações contidas na figura não podiam achar a equação da parábola e, portanto, a equação de r também não.

O professor escutou atenciosamente o seguinte raciocínio:

A equação geral da parábola é $y = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são constantes que devem ser determinadas com os dados indicados na figura. Certamente, pode-se afirmar que $a < 0$.

Por outro lado, dado que a curva passa pela origem, temos $c = 0$. Assim, a equação da parábola fica $y = ax^2 + bx$.

Também, visto que o ponto (4,0) está na curva, tem-se $0 = 16a + 4b$, isto é, $b = -4a$.

Então, seria interessante obter uma outra igualdade envolvendo essas constantes para formar um sistema de duas equações com duas incógnitas que, no caso de ser possível e determinado, nos permitiria conhecer os valores de a e b. É oportuno, então, usarmos outra pista indicada no desenho: a abcissa do vértice da parábola é igual a 2. Como a abcissa do vértice da parábola

$$y = ax^2 + bx \text{ é } -\frac{b}{2a},$$

temos

$$-\frac{b}{2a} = 2 \text{, isto é, } b = -4a.$$

Logo, não aparece uma nova relação entre a e b, ficando estabelecido que a equação da parábola é $y = ax^2 - 4ax$, onde a é desconhecida.

O professor Beremis reconheceu que seus alunos estavam certos: com as informações dadas não era possível achar o valor de a.

Entretanto, com seu costumeiro espírito animado, propôs aproveitar o momento para revisar o conceito de reta tangente. Assim começou:

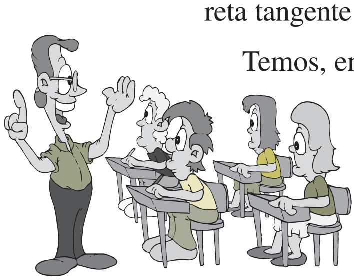
Seja r uma reta (não vertical), com coeficiente angular m e passando pelo ponto (x_1, y_1) da parábola dada por $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Suponha que (x_1, y_1) não coincide com o vértice da parábola (ou seja, $m \neq 0$). A equação de r é $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Nosso intuito é encontrar m, de modo que a reta r tenha (x_1, y_1). Como único ponto em comum com a parábola.

Essa reta r é denominada reta tangente à parábola no ponto (x_1, Y_1) (É bom mencionar que, usando o conceito de derivada, obtém-se uma definição de reta tangente válida para uma curva qualquer, não apenas para parábolas).

Temos, então, o sistema



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$$

que deve ter o ponto (x_1, y_1) como única solução.

Substituindo-se o y da primeira equação na segunda, e usando

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + \mathrm{c},$$

após agrupar e fatorar, vem

$$(x - x_1)[a(x + x_1) + b - m] = 0.$$

Se a única solução dessa equação deve ser $x = x_1$, isso nos conduz a

$$m = 2ax_1 + b.$$

Assim, a equação de r fica

$$y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1).$$

O requerido na tarefa proposta é o valor de x correspondente a $y = 0$. Chamando esse valor de x_0, temos

$$-\,y = (2ax_1 + b)(x + x_1) \quad \text{ou}$$

$$x_0 = \frac{y_1}{2ax_1 + b} + x_1.$$

(Lembrar que $m = 2ax_1 + b \neq 0$.)

Também, no nosso caso particular,

$$x_1 = 1 \text{ e } y_1 = ax_1^2 + bx_1 = a + b.$$

Assim,

$$x_0 = -\frac{a + b}{2a + b} + 1 \cdot$$

Nesse instante, os olhos do professor Beremis brilharam e sua face iluminou-se de alegria, pois percebeu que podia resolver o problema mesmo sem conhecer o valor de a. Com efeito, visto que

$$b = -4a, \quad x_0 = \frac{a - 4a}{2a - 4a} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

No final, cada rosto desenhava um sorriso. Não era para menos!

Nota da RPM

Observe que a parábola do Prof. Beremis não é única. Na verdade trata-se de toda uma família de parábolas, $y = ax(x - 4)$, $a < 0$. Duas delas estão ilustradas na figura a seguir, com as respectivas tangentes no ponto $(1, y_1) = (1, -3a)$. Todas essas retas cortam o eixo O_x no ponto

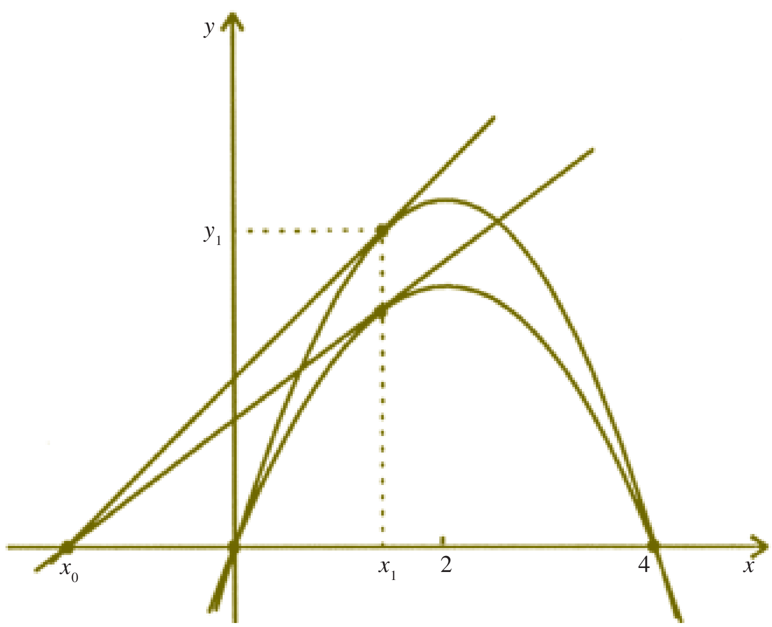
$$x = -\frac{1}{2}.$$

É interessante observar que isso continua verdadeiro mesmo que escolhamos qualquer outro ponto de tangência (x_1, y_1) com $x_1 \neq 2$.

Teremos, então,

$$x_0 = -\frac{y_1}{2a(x_1 - 2)} + x_1 = \frac{-a(x_1)^2 - 4ax_1}{2a(x_1 - 2)} + x_1 = \frac{x_1(4 - x_1)}{2(x_1 - 2)} + x_1.$$

Como a última expressão não depende de a, mas só de x_1, as retas tangentes a todas as parábolas cortam o eixo O_x no mesmo ponto.



Visualizando as equações

Oscar Guelli

Euclides de Alexandria

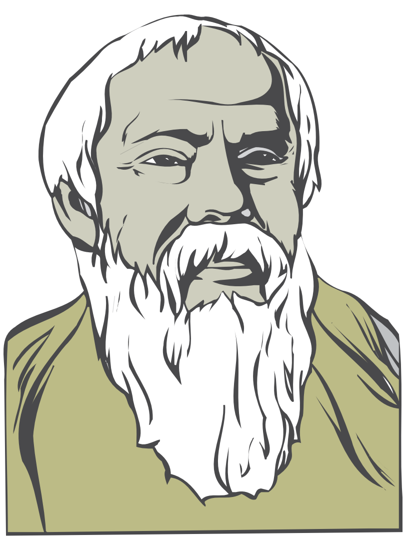
Com a morte de Alexandre, o Grande, no ano 324 a.C, o império mundial que ele havia construído foi dividido entre os seus generais.

O Egito ficou sob o domínio de Ptolomeu.

Na cidade de Alexandria, Ptolomeu criou um centro de ensino e pesquisa chamado Museu, que significa refúgio das musas. Mais de 500 mil manuscritos foram guardados na biblioteca do Museu.

Muitos dos grandes cientistas da época trabalharam nesse Museu. Entre eles estava Euclides de Alexandria.

O Museu funcionava como uma espécie de universidade moderna. Entre os professores, alguns se dedicavam à pesquisa, outros eram bons administradores, e uma parte se destacava pela capacidade de ensinar.



Euclides fazia parte deste último grupo. Foi, provavelmente, por esta razão que o livro *Os Elementos* – escrito por Euclides por volta de 300 a.C. e depois copiado e recopiado centenas de vezes – teve uma repercussão tão grande nos meios científicos. Durante mais de 20 séculos os homens estudaram a Geometria, segundo Euclides.

Todo estudante de Geometria tem uma dívida de gratidão para com Euclides. Mas os estudantes de Álgebra também devem saber algo sobre ele.

Para um estudante de hoje, a Álgebra começa quando as quantidades desconhecidas passam a ser representadas por letras.

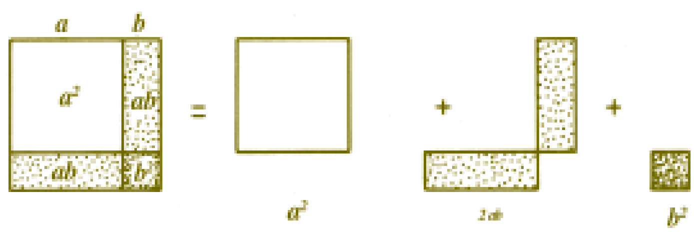
Na sua “Álgebra” Euclides representava as quantidades desconhecidas por segmentos de retas, quadrados, retângulos, triângulos, etc.

A Álgebra Geométrica

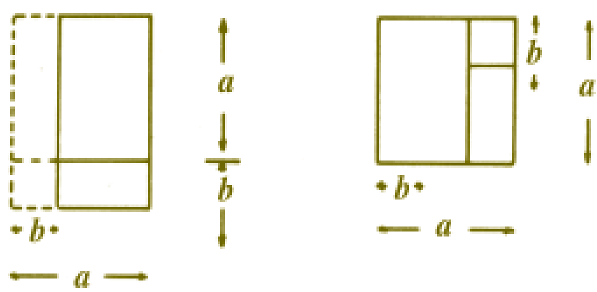
Veja: nós entendemos o produto notável $(a + b)^2$ como “o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo”, isto é,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Euclides e seus colegas de Alexandria também manejavam com muita facilidade este produto notável, mas interpretando-o através desta construção geométrica:

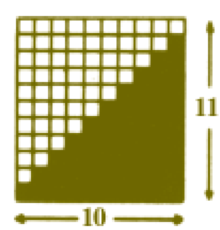


Você consegue reconhecer nesta construção geométrica:



o produto notável

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \ ?$$



Ou através da figura ao lado você consegue entender por que

$$1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

e assim conseguir demonstrar que

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \; ?$$

Euclides realiza muitas construções semelhantes a estas em *Os Elementos***,** utilizando-se somente de uma régua e de um compasso. Além disso, a régua não tem qualquer tipo de marcação, nela não está assinalado nenhum milímero, nenhuma medida.

Euclides e os antigos matemáticos preocupavam-se apenas com as relações que podiam obter geometricamente. Para eles, os cálculos e as medidas eram para serem efetuados unicamente por escravos.

Um problema simples como este, formulado pelos matemáticos egípcios, há cerca de 4 000 anos:

Um número, o seu dobro,
a sua terça parte,
todos ao juntar-se fazem 10.
Diga-me, qual é o número?

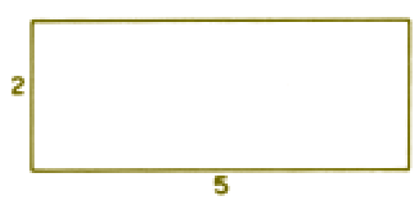
aprendemos a expressar através de uma equação:

$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10.$$

No tempo de Euclides a Álgebra simbólica estava ainda muito distante de ser inventada; por isso os matemáticos da antiguidade usavam construções geométricas para estudar equações.

Veja como podemos *visualizar* a resolução desta equação por meio de um método descrito por Euclides no livro 2 de ***Os Elementos*,** e que passou para a história com o nome de *Álgebra Geométrica*:

· Em primeiro lugar construímos um retângulo de área 10.



Ao invés do retângulo anterior, poderíamos ter desenhado qualquer outro, cujos lados tivessem estas medidas: 10 e 1, 4 e 2,5 , 1,25 e 8 etc. Procuramos traduzir o problema através de área de figuras planas. Esta primeira construção corresponde à seguinte passagem na equação:

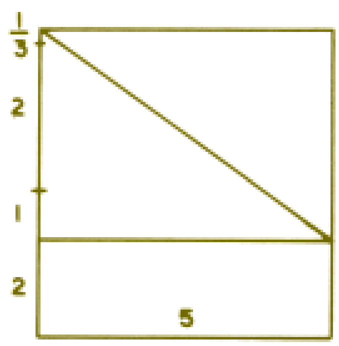
$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x + 2x + \frac{x}{3} = 5 \times 2.$$

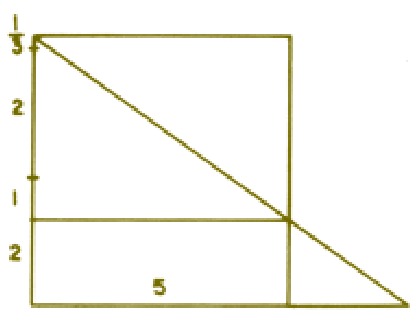
- "Anexamos" a este retângulo, era assim que se escrevia antigamente, um novo retângulo de lados 5 e

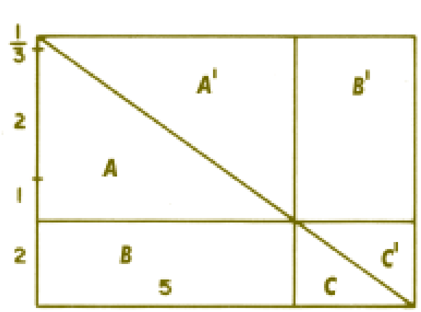
$$1 + 2 + \frac{1}{3}.$$

$$x \cdot (\, 1 + 2 + \frac{1}{3}.) = 5 \cdot 2$$



- Com os passos seguintes vamos construir um outro retângulo de área igual à área do retângulo de lados 5 e 2. Por isso, prolongamos a diagonal do retângulo até ela cortar o prolongamento do lado 5 e formamos um outro retângulo:





Observe:

área de A + área de B + área de C = área de A' + área de B' + área de C

Como área de A = área de A' e área de C = área de C'
temos que área de B = área de B.

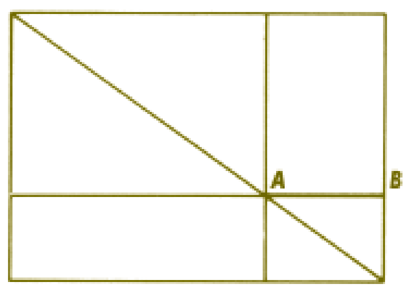
Portanto,

$$x \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2.$$

Para os matemáticos de hoje, a resposta do problema é o número real

$$x = \frac{5\,.\,2}{1 + 2 + \frac{1}{3}} = \ldots\ = 3.$$

A "Álgebra" de Euclides significa a construção desta figura



e a solução da "equação" é o segmento AB.

Dois motivos impediram que a Álgebra Geométrica tivesse um papel muito mais destacado no estudo das equações na Matemática:

• um motivo político: a sociedade grega desta época era escravocrata e o desenvolvimento da ciência refletia a estrutura social. Assim, os antigos matemáticos gregos consideravam os cálculos com números e medidas um assunto de escravos, indigno de cidadãos livres;

• o outro motivo era puramente matemático: os antigos matemáticos gregos ficaram surpresos e desnorteados ao descobrirem que havia alguns problemas impossíveis de serem resolvidos por meio da Álgebra Geométrica de Euclides.

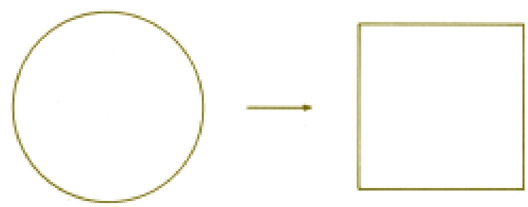
Mas não foram somente eles.

Por mais de 2 000 anos, matemáticos de outros povos também tentaram resolver esses problemas, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

E a história de um destes problemas, chamados de *problemas insolúveis da antiguidade*, é que vamos discutir.

A quadratura do círculo

Quando uma pessoa está fazendo um cálculo errado, absurdo, é comum dizer que ela quer "quadrar o círculo".



Esta expressão significa, simplesmente, que dado um círculo devemos construir um quadrado que tenha exatamente a mesma área do círculo, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

E muito fácil construir um quadrado de área aproximadamente igual a de um círculo dado.

Veja: a área de um círculo de raio r é igual a πr^2. Construir um quadrado de área igual à de um círculo de raio 1 equivale a construir um segmento l dado por

$$l \, . \, l = \pi 1^2 \text{ ou seja } l = \sqrt{\pi}$$

Sabemos que $\pi \approx 3{,}14$ e, portanto, $l \approx 1{,}772$. Podemos, agora, construir um quadrado de lado 1,772 – a sua área será *aproximadamente* igual à área do círculo de raio 1.

Durante cerca de 20 séculos, os mais brilhantes matemáticos de todo o mundo não conseguiram construir, usando somente régua e compasso, um quadrado que tivesse exatamente a mesma área que um círculo dado.

É este o significado da Álgebra Geométrica de Euclides: efetuar construções com régua e compasso seguindo os passos da demonstração de um teorema.

Os numerosos esforços para quadrar o círculo duraram desde o século 3 a.C. até o século 19.

Em 1882, um matemático alemão, chamado Lindemann, mostrou a impossibilidade de se resolver o problema através da Álgebra Geométrica: é impossível construir o segmento $\sqrt{\pi}$, usando-se apenas uma régua e um compasso. A demonstração requer uma Matemática bastante sofisticada.

A Álgebra Geométrica dos antigos matemáticos gregos e a regra da falsa posição do Egito Antigo representaram, de um certo modo, o esforço dos matemáticos da antiguidade para encontrar uma linguagem apropriada para as equações.

Mas os dois métodos apresentavam falhas:

- a Álgebra Geométrica não tinha resposta para vários problemas;
- a regra da falsa posição parecia uma "receita", sem nenhuma justificação ou explicação.

Por volta do ano 400 d.C, uma idéia simples e audaciosa de um matemático de Alexandria, chamado Diofante, iria começar a mudar todo o aspecto da Matemática: começavam a surgir os primeiros símbolos matemáticos, inicialmente na forma de abreviação de palavras.

Mas, esta já é uma outra história.

Uma equação interessante

Cláudio Possani

Há algum tempo, o professor Sidney Luiz Cavallanti mostrou-me a equação

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \quad (1)$$

e fez a seguinte observação: "Apesar de, no decorrer da resolução, elevarmos as equações somente a potências *ímpares* (duas elevações ao cubo), ainda assim, surpreendentemente, aparece uma raiz falsa. Por quê?"

Antes de mostrar como o professor Sidney resolveu a equação, vejamos o porquê da sua surpresa.

Sabemos que

$$x=y \;\Rightarrow\; x^n=y^n,\;\; \forall\, x,y\in \mathbb{R},\;\; \forall\, n\in \mathbb{N}$$

mas a recíproca desta afirmação só é verdadeira se n for ímpar. Isto é,

$$x^n=y^n \;\Rightarrow\; x=y,\;\; \forall\, x,y\in \mathbb{R}\;\;,$$

se n for ímpar.

É fácil ver que a propriedade $x^n = y^n \Rightarrow x = y$ não vale se n for par – basta observar que

$$5^2=(-5)^2 \text{ e } 5\neq -5.$$

Estes fatos aparecem nitidamente quando, no final do ensino fundamental, resolvemos com nossos alunos as equações irracionais. Vejamos um exemplo: Resolver

$$\sqrt{2x-3} = x-3 \overset{1}{\Rightarrow} (\sqrt{2x-3})^2 = (x-3)^2 \overset{2}{\Leftrightarrow} 2x-3 =$$

$$= x^2 - 6x + 9 \overset{3}{\Leftrightarrow} x^2 - 8x + 12 = 0 \overset{4}{\Leftrightarrow} x = 6 \text{ ou } x = 2.$$

As passagens 2, 3 e 4 são equivalências, mas a recíproca da implicação 1 não é verdadeira. É por isso que, após resolvermos a equação, “testamos” as raízes encontradas para ver se elas, de fato, satisfazem a equação inicial. No exemplo, 6 é raiz de (2), mas 2 não o é.

Portanto, estamos acostumados com o aparecimento de “falsas raízes” na resolução de equações irracionais.

Mas, no exemplo que o professor Sidney apresentou, o fato de aparecer uma “raiz falsa” era estranho, pois a resolução da equação exigia apenas que seus membros fossem elevados ao cubo, e sabemos que, em *R*,

$$x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y.$$

Vejamos como o professor Sidney resolveu a equação:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1 \qquad (1)$$

Elevando ao cubo, obtemos

$$2x - 1 + 3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + x - 1 = 1 \qquad (2)$$

$$3x - 2 + 3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \qquad (3)$$

o termo entre parênteses vale 1 (é a própria equação 1!)

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 \qquad (4)$$

$$3x + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 \qquad (5)$$

$$\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1} = 1 - x \qquad (6)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = (1-x)^3 \qquad (7)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \qquad (8)$$

$$x^3 - x^2 = 0 \qquad (9)$$

E, portanto, $x = 0$ ou $x = 1$ ■

Verifica-se, por substituição em (1), que 1 é solução, mas 0 não é.

Onde e por que apareceu esta falsa raiz?

Sugiro que o leitor tente responder à esta pergunta antes de prosseguir.

Observe que $x = 0$ não é solução das equações (1), (2) e (3), mas é solução das equações a partir de (4). Na verdade, (1), (2) e (3) são equivalentes entre si (possuem o mesmo conjunto solução), e as equações de (4) a (9) também são equivalentes entre si, mas (3) e (4) não são equivalentes. Foi nesta passagem que fizemos algo "ilícito".

O que fizemos para passar de (3) a (4)? Ora, usamos novamente a equação (1) substituindo

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}$$

por 1, e este procedimento não gera uma equação equivalente à anterior. Tendo duas equações equivalentes, (1) e (3), se substituirmos uma na outra, obtemos uma nova equação que é conseqüência das anteriores, mas não é, necessariamente, equivalente a elas. Assim (3) $\Rightarrow$ (4), mas não vale a recíproca.

Vejamos um exemplo onde este fato é mais evidente:

$x = 2$ (o conjunto solução é $\{2\}$),

$2 = x$ (equivalente a de cima).

Substituindo uma na outra, obtemos $x = x$, cujo conjunto solução é IR !

Assim, o aparecimento de uma raiz falsa não está ligado ao fato de a equação ser irracional nem às potências que tomamos, e sim. ao procedimento da resolução.

Uma palavra sobre a abordagem deste tema em sala de aula: o "truque" utilizado na passagem de (3) para (4) é útil, pois "limpou" a equação, mas não é uma equivalência – não podemos perder de vista a equação original. Situações como esta são comuns, por exemplo, na trigonometria, quando usamos numa equação a identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vamos ilustrar o aparecimento de falsas raízes por meio de mais dois exemplos:

$$x = 1 - x \text{ (e, portanto, } x = 1/2).$$

Se elevarmos ambos os membros ao cubo, teremos:

$$x = 1 - x \iff x^3 = (1-x)^3 \iff x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow$$

(substituindo x por $1 - x$)

$x^3 = 1 - 3(1 - x) + 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2; x = -1; x = 2$ ■

Outro exemplo:

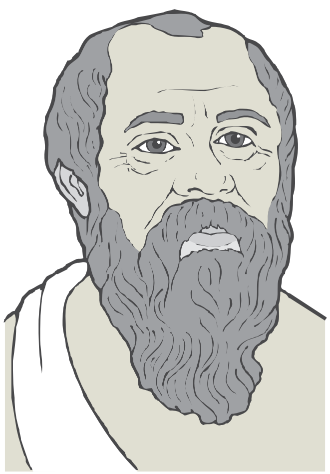
$$x = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

(substituindo x por 1)

$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1, \blacksquare$$

As ternas pitagóricas (novamente!)

Cláudio Arconcher



Muito freqüentemente, mencionamos em sala de aula a terna de números pitagóricos 3, 4, 5. Uma forma natural de introduzi-la é, após o estudo do Teorema de Pitágoras, propor à classe encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo sabendo que são números inteiros e consecutivos. Podemos, em seguida, propor a generalização natural desta questão: determinar todas as ternas de números inteiros que sejam as medidas dos lados de algum triângulo retângulo. Explicamos, então, que uma terna de tais números é chamada *reduzida* se seus componentes não tiverem fator comum distinto da unidade.

A resposta para essa questão é dada pelo seguinte teorema:

Se p e q tomam todos valores inteiros, restritos somente pelas condições

(1) $p > q > 0$,

(2) p e q são primos entre si,

(3) p e q não são ambos ímpares,

então as expressões $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$ fornecerão todas as ternas pitagóricas reduzidas, e cada terna somente uma vez.

Normalmente encerramos a questão por aqui. Há, porém, uma curiosidade perfeitamente pertinente que podemos acrescentar, enriquecendo o assunto. Trata-se da seguinte propriedade:

Em qualquer terna pitagórica reduzida, os números 3, 4 *e* 5 *estão presentes.*

Devemos entender que 3, 4 e 5 estão presentes como fatores dos elementos da terna, eventualmente os três números como fatores de um mesmo elemento. Por exemplo, usando o teorema mencionado anteriormente com $p = 6$ e $q = 5$, obtemos a terna pitagórica reduzida (11, 60, 61) onde 3, 4 e 5 são fatores de 60.

Minha atenção foi despertada por um aluno, Frederico, que me disse ter lido tal afirmação no livro *Maravilhas da Matemática,* do nosso Malba Tahan.

Para demonstrar a propriedade, usamos o teorema mencionado. Seja então uma terna pitagórica $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$, com p e q naturais restritos às condições (1), (2) e (3).

- O fator 4 sempre vai estar no elemento $2pq$.

E óbvio por (3), pois um dos números, p ou q, é par.

- Se o fator 3 não ocorrer no elemento $2pq$, então ele estará em $p^2 - q^2$.

De fato, dividindo p e q por 3, encontraremos resto 1 ou 2, ou seja, estes números são da forma $3k + 1$ ou $3k + 2$. Em qualquer caso, o quadrado é da forma $3k + 1$. Portanto, a diferença $p^2 - q^2$ de dois números da forma $3k + 1$ é divisível por 3.

- Se o fator 5 não ocorrer no elemento $2pq$, então ele estará em $p^2 - q^2$ ou em $p^2 + q^2$.

De fato, dividindo p e q por 5, encontraremos para resto um dos números: 1, 2, 3 ou 4. Isto é, p *e* q são de uma das formas: $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, ou $5k + 4$. O quadrado de qualquer um desses números é da forma $5k + 1$ ou $5k + 4$. Assim, se p e q forem do mesmo tipo ($5k + 1$ ou $5k + 4$), $p^2 - q^2$ será múltiplo de 5. Caso contrário, o fator 5 estará em $p^2 + q^2$.

Moral da história:

Numa terna pitagórica não há como escapar dos números 3, 4 e 5!

O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções

Maria Alice Gravina

Na minha experiência como professora de alunos calouros do curso de Matemática da UFRS, constatei o quanto os alunos vêm presos ao uso de tabelas na construção de gráficos de funções. E isto faz com que percam a idéia mais geral sobre o comportamento da função. Com a tabela o problema se reduz à marcação de alguns pontos do gráfico por meio de avaliação em valores de x (geralmente, $x = 0, +1, -1, +2, -2$), tornando-se um exercício meramente computacional, sem muito raciocínio.

O que pretendo neste artigo é dar uma idéia de como podemos fazer nossos alunos de ensino médio, através de raciocínios simples, obterem informações sobre gráficos, especialmente sobre forma das curvas; a tabela entra como um recurso, mas não como o único recurso.

Vamos aqui nos deter no estudo da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Começaremos com a função quadrática mais simples e, gradativamente, chegaremos à função quadrática geral.

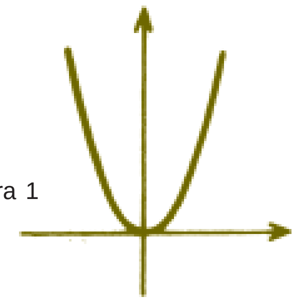
Caso I

$f(x) = x^2$

Observamos que conforme o valor absoluto de x aumenta, x^2 aumenta mais rapidamente e, portanto, a curva no gráfico deve ser do tipo "voltada para cima". Com esta informação e mais a tabela obtemos o gráfico:

x	$f(x)$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

Figura 1

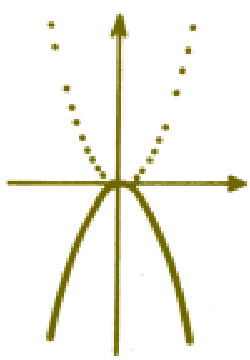


Caso II

$f(x) = -x^2$

O gráfico desta função são os pares de pontos $(x, -x^2)$

Figura 2



Como já conhecemos o gráfico de $y = x^2$, usaremos este como auxílio (curva pontilhada na Figura 2).

Localizamos o ponto (x, x^2), marcamos no eixo y o valor $-x^2$ e localizamos o ponto $(x, -x^2)$. Vemos assim que o gráfico de f é o **simétrico de** $y = x^2$ **em relação ao eixo** x**.**

Caso III

$f(x) = ax^2$

Nesta situação vamos considerar os casos:

1. $a > 0$

Aqui o gráfico de f tem a forma de $y = x^2$, sendo exatamente igual quando $a = 1$. Usamos novamente o gráfico de $y = x^2$ como auxílio (curva pontilhada nas Figuras 3 e 4).

Localizamos o ponto (x, x^2), $x \neq 0$ e vamos localizar o ponto (x, ax^2):

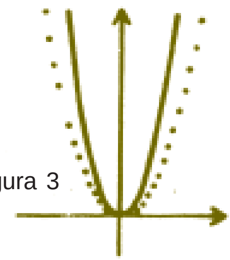


Figura 3

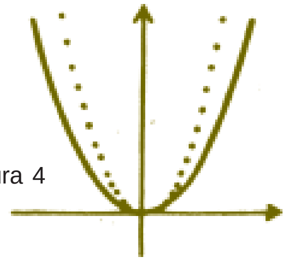


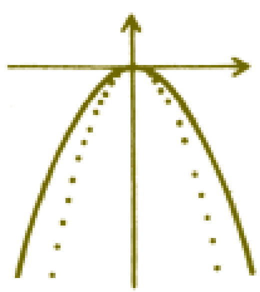
Figura 4

1.1 para $a > 1$, tomos $ax^2 > x^2$ e, portanto, o ponto (x, ax^2) está acima de (x, x^2), na mesma reta vertical. Isto significa que o gráfico de f está acima de $y = x^2$, exceto na origem (Figura3).

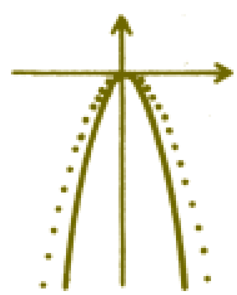
1.2 para $0 < a < 1$, temos $ax^2 < x^2$ e, portanto, o ponto (x, ax^2) está abaixo de (x, x^2), na mesma reta vertical. Isto significa que o gráfico de f está abaixo do gráfico de $y = x^2$, exceto na origem (Figura 4).

2. $a < 0$

Aqui o gráfico de f tem a forma, de $y = x^2$ (curva pontilhada nas Figura 5 e 6) e neste ponto o leitor deve se convencer de que os gráficos que se obtêm são:



$-1 < a < 0$
Figura 5



$a < -1$
Figura 6

Caso IV

$f(x) = x^2 + h$

0 gráfico de f tem a forma de $y = x^2$, sendo igual quando $h = 0$. Vamos usar este último gráfico como auxílio (curva pontilhada nas Figuras 7 e 8). Localizamos o ponto (x, x^2) e marcamos no eixo y o valor $x^2 + h$.

1. Se $h > 0$, temos $x^2 + h > x^2$, e portanto o ponto $(x,\ x^2 + h)$ está acima de $(x,\ x^2)$, na mesma reta vertical. Vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$", deslocando-se este último de h unidades para cima (Figura 7).

2. Se $k < 0$, com raciocínio análogo ao anterior, vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de $-h$ unidades para a direita (Figura 8).

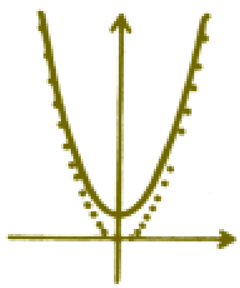


Figura 7

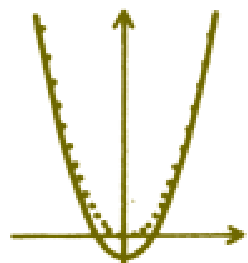


Figura 8

Caso V

$f(x) = (x + k)^2$

Vamos usar novamente o gráfico de $y = x^2$ como auxílio (curva pontilhada nas figuras 9 e 10). Começamos marcando os valores x e $x + k$ no eixo x, o ponto $(x + k,\ (x + k)^2)$ no gráfico de $y = x^2$, e queremos localizar $(x,\ (x + k)^2)$.

1. Se $k > 0$, temos $x < x + k$ e, portanto, o ponto $(x,\ (x + k)^2)$ se encontra à esquerda de $(x + k, (x + k)^2)$, na mesma reta horizontal. Vemos assim que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de k unidades para a esquerda (Figura 9).

2. Se $k < 0$, com raciocínio análogo ao anterior, vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de $-k$ unidades para a direita (Figura 10).

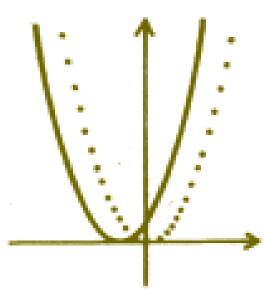


Figura 9

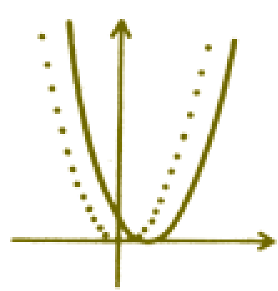


Figura 10

Caso VI

$f\{x) = a(x + k)^2 + h$

Por meio dos casos analisados anteriormente obtemos facilmente o gráfico de f e o leitor já deve perceber que estamos no caso geral de função quadrática. Resolvemos o problema fazendo, sucessivamente, os gráficos de $y = (x + k)^2$, $y = a(x + k)^2$, $y = a(x + k)^2 + h$, e para efeitos de figura vamos tomar $a > 0$. mais particularmente, $a > 1$, $k < 0$ e $h > 0$ (Figuras 11, 12 e 13):

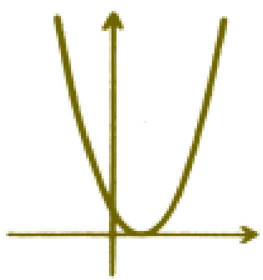


Figura 11

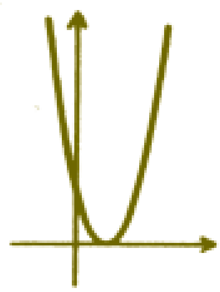


Figura 12

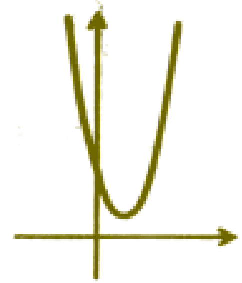
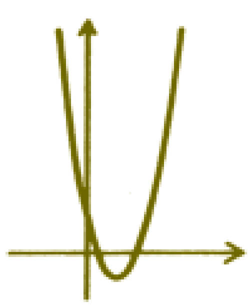


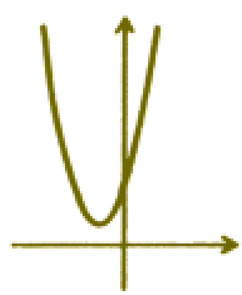
Figura 13

O leitor deve se convencer que as demais possibilidades para o gráfico de f são:

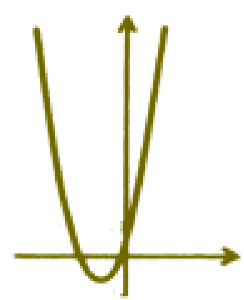
1. $a > 0$



$k < 0$; $h < 0$

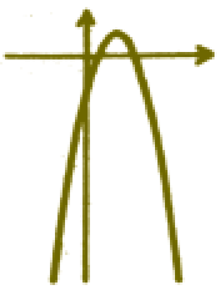


$k > 0$; $h > 0$

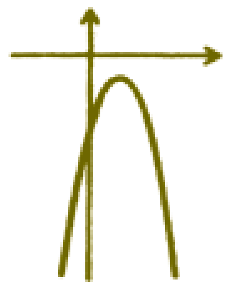


$k > 0$; $h < 0$

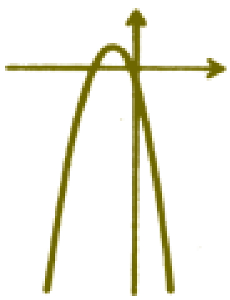
2. $a < 0$



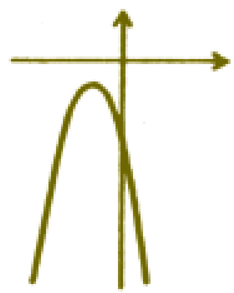
$k < 0 \; ; \; h > 0$



$k < 0 \; ; \; h < 0$



$k > 0 \; ; \; h > 0$



$k > 0 \; ; \; h < 0$

Se a função quadrática for dada na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, usamos o procedimento de *completar quadrados:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{2a}\right)$$

sendo esta expressão final de f do tipo $a(x + k)^2 + h$, com $k = b/2a$ e $h = (4ac - b^2)/2a$, estamos aqui com as informações necessárias para traçar o gráfico de f. E ainda da expressão final de f obtemos facilmente:

1. As coordenadas do vértice V do gráfico:

Se $a > 0$, o menor valor de f é atingido em $x = -b/2a$ e este valor é $(4ac - b^2)/2a$, donde

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{2a}\right)$$

Se $a < 0$, obtém-se analogamente as mesmas coordenadas para V.

2. As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$:

O gráfico encontra o eixo x, se, e somente se,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{2a} = 0 \quad \text{isto é} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a^2}$$

Vemos que esta equação tem raízes quando $b^2 - 4ac \geq 0$ e, neste caso, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neste final gostaria de salientar que as ideias usadas neste artigo podem se aplicar a outras situações. Uma vez conhecido o gráfico de $y = f(x)$, obtemos facilmente os gráficos das funções $y = f(x + k)$, $y = af(x)$ e $y = f(x) + h$.

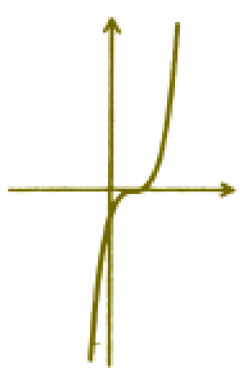


Figura 14

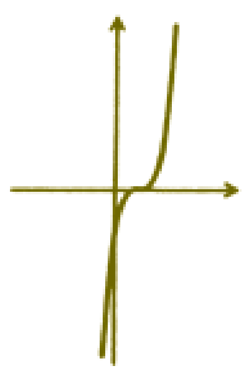


Figura 15

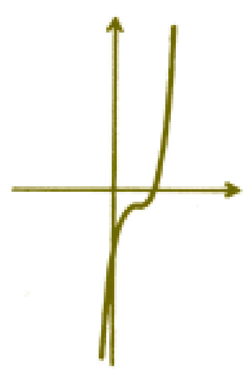


Figura 16

Por exemplo, a partir de $y = x^a$ obtemos o gráfico de $y = 2(x - 1)^a - 1$, fazendo sucessivamente os gráficos de $y = (x - 1)^a$, $y = 2(x - 1)^a$ e $y = 2(x - 1)^a - 1$ (Figuras 14, 15 e 16).

Ainda da minha experiência, quero registrar que este tipo de abordagem para gráficos sempre entusiasma os alunos, pois deste modo eles enxergam a forma da curva e sentem-se seguros ao fazerem os traçados.

Finalizo, registrando os meus agradecimentos ao estudante Leonardo Gick, pelo seu trabalho na confecção dos gráficos apresentados no texto (original).

Média Harmônica

Seiji Hariki

As médias mais conhecidas pelos estudantes e professores de Matemática são a aritmética e a geométrica. Neste artigo, apresento aos leitores uma outra média, a *média harmônica*.

Vejamos primeiro como a média harmônica aparece naturalmente acoplada às médias aritmética e geométrica. Consideremos as relações seguintes, envolvendo os números reais a, b e c, positivos e distintos:

$$(a - b) / (b - c) = a / a \qquad (1)$$

$$(a - b) / (b - c) = a / b \qquad (2)$$

$$(a - b) / (b - c) = a / c \qquad (3)$$

Notemos que essas equações diferem apenas nos segundos membros: na equação (1) o denominador do quociente é a, na (2) é b, e na (3) é c.

Isolando b na equação (1), obtemos

$$b = (a + c)/2,$$

ou seja, b é a *média aritmética* de a e c; isolando b na equação (2), obtemos

$$b = \sqrt{ac}\ ,$$

ou seja, b é a *média geométrica* de a e c; isolando b em (3), obtemos

$$b = 2ac/(a + c),$$

ou seja, b é a *média harmônica* de a e c.

O que é média harmônica

Um outro modo de introduzir a média harmônica é pela definição formal. Sejam a e b dois números reais positivos. A *média harmônica MH* de a e b é o inverso da média aritmética dos inversos desses números:

$$1/MH = (1/a + 1/b)/2 \quad \text{ou}$$
$$MH = 2ab/(a + b).$$

Substituindo $(a + b)/2$ por MA e $a \cdot b$ por $(MG)^2$, obtemos as relações:

$$MH \cdot MA = a \cdot b \text{ e } MH \cdot MA = (MG)^2.$$

A última igualdade diz que a média geométrica de a e b é igual à média geométrica das suas médias aritmética e harmônica. Reescrevendo essa equação na forma de proporção, obtemos:

$$MA/MG = MG/MH,$$

relação essa que será utilizada logo a seguir na representação geométrica da média harmônica.

Como surgiu a média harmônica

Exploremos um pouco mais a equação $MH \cdot MA = a \cdot b$. Dela obtemos $a / MH = MA / b$. Essa proporção pode ser reescrita à moda de Euclides:

$$a : MH :: MA : b \quad (*),$$

que se lê "a está para MH assim como MA está para b", ou, utilizando-se propriedades de proporções,

$$b : MA :: MH : a.$$

Por exemplo, consideremos os valores $a = 6$ e $b = 12$. Nesse caso, MH e MA são também inteiros: $MH = 8$ e $MA = 9$. Logo, vale a proporção

$$12 : 9 :: 8 : 6 .$$

Segundo o historiador português *Almeida Vasconcellos*, a proporção (*) já era conhecida pelos babilônios. No entanto, coube ao matemático grego

Pitágoras, que viveu por volta do ano 550 a.C., a descoberta de que essa proporção tinha algo a ver com a música.

Pitágoras descobriu que os comprimentos *x, y, z, w* de uma corda vibrante, correspondentes a uma nota (digamos dó), à sua quarta (fá), à sua quinta (sol) e à sua oitava (dó), estão entre si assim como os números 12, 9, 8, 6. Na notação de Euclides,

$$x : 12 :: y : 9 :: z : 8 :: w : 6 \text{ ou,}$$
$$\text{em razões, } x/12 = y/9 = z/8 = w/6.$$

Quanto à origem do nome, parece que foi *Arquitas*, que viveu por volta do ano 400 a.C., o primeiro a chamar de *harmônica* a média que antes dele era conhecida como subcontrária.

Como desenhar a média harmônica

A representação geométrica da média harmônica apareceu bem depois de sua definição. Sabe-se por exemplo que, por volta do ano 300 a.C., o matemático grego *Pappus* representava num único desenho as três médias - a aritmética, a geométrica e a harmônica. Na figura 1, $AD = a$ e $DB = b$. Podemos ver que o raio OC é a média aritmética de a e b e a altura CD do ΔOCD é a sua média geométrica. Traçando-se DE perpendicular ao lado OC, obtemos um ΔDCE que é semelhante ao ΔOCD. Daí, utilizando a proporção (*), concluímos que CE é a média harmônica de a e b.

A Figura 1 sugere que a média harmônica é sempre menor que a média geométrica e que esta, por sua vez, é menor que a média aritmética, exceto no caso-limite $a = b$, quando as três médias coincidem. Os leitores estão convidados a dar uma demonstração analítica desses fatos.

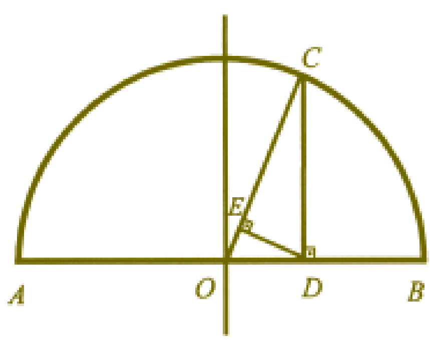


Figura 1

Outro desenho da média harmônica

Existe uma construção alternativa da média harmônica, bem pouco conhecida e que, a meu ver, é muito mais sugestiva do que a de Pappus.

Assinalam-se dois pontos quaisquer A e B de uma reta (Figura 2). Por eles levantam-se segmentos de reta AC e BD, com comprimentos a e b, perpendiculares à reta. Ligam-se as extremidades de um segmento com as extremidades do outro. Pelo ponto de interseção E dos segmentos internos, levanta-se a paralela aos segmentos AC e BD, que determinará o segmento FG entre os segmentos externos. Os leitores poderão mostrar que o comprimento desse segmento é a média harmônica de a e b.

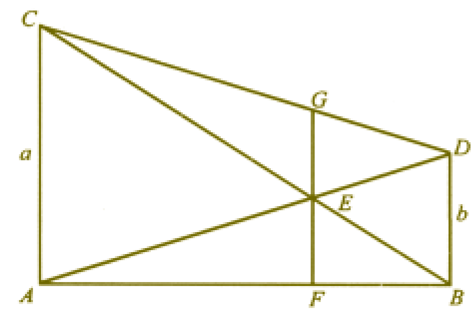


Figura 2

Ao refletir um pouco sobre essa construção geométrica da média harmônica, podemos observar alguns fatos interessantes.

Primeiro, a média harmônica não depende dos pontos A e B que assinalamos na reta; se tomarmos outros pontos A' e B' sobre a reta e fizermos as mesmas construções, obteremos um segmento cujo comprimento é a média harmônica de a e b.

Segundo, a média harmônica não depende da inclinação dos segmentos iniciais em relação à reta-base; a única coisa que importa é o paralelismo dos segmentos AC e BD (Figura 3).

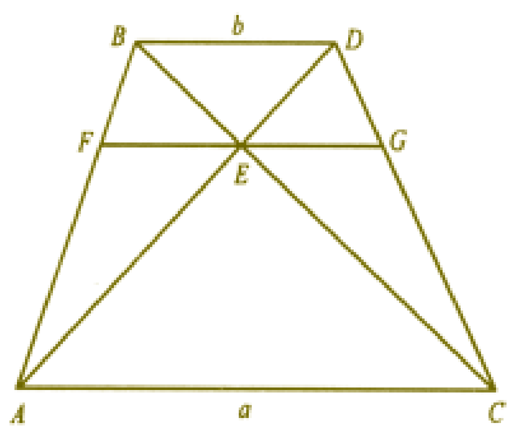


Figura 3

$$FG = MH(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Terceiro, se aumentarmos indefinidamente o valor de a, mantendo fixo o valor de b, a *MH* de a e b permanecerá sempre menor que o dobro de b. Em outras palavras, a *MH* é limitada superiormente pelo dobro do mínimo entre a e b; ela não "explode" (isto é, não cresce além de qualquer limite) quando só um dos números "explode", contrariamente ao que acontece com as médias aritmética e geométrica.

E por último, quando fazemos o valor de a tender a zero, mantendo o valor de b fixo, a *MH* também tende a zero, enquanto a média aritmética permanecerá sempre maior que a metade de b. Nesse caso, a média geométrica tem o mesmo comportamento que a média harmônica.

Onde aparece a média harmônica

São inevitáveis as perguntas pragmáticas que alunos e professores costumam fazer: Para que serve o estudo da média harmônica? Onde se aplica a média harmônica?

Sem a pretensão de responder cabalmente a essas perguntas, vou apenas salientar a importância da média harmônica, assinalando a sua presença em alguns problemas da vida prática.

• O problema das velocidades

O sr. Mário, um imprudente vendedor de filtros de água, costuma acordar cedo e viajar de carro, da cidade A até a cidade B, com a velocidade média de 120 km/h. Depois de visitar seus clientes e tomar com eles algumas garrafas de cerveja, ele volta de B para A, com a velocidade média de 60 km/h. Qual é a velocidade média que o sr. Mário desenvolve no percurso todo?

A resposta mais imediata que surge em nosso cérebro é que a velocidade média no percurso todo é a média aritmética das velocidades na ida e na volta, o que daria 90 km/h. Essa resposta, embora "intuitiva", está errada! Temos que estar sempre alertas, à maneira dos escoteiros, para não deixar a razão Matemática ser desgovernada por falsas "intuições".

A resolução correta do problema é a seguinte. Sejam:

d, a distância entre as cidades A e B,

v_1, a velocidade média na ida,

v_2, a velocidade média na volta,

t_1, o tempo de viagem na ida,

t_2, o tempo de viagem na volta.

Temos então que $d = v_1 t_1 = v_2 t_2$. Se v é a velocidade média no percurso todo, temos:

$$2d = v\ (t_1 + t_2).$$

Logo,

$$2d = v\ (d/v_1 + d/v_2).$$

Simplificando:

$$v = 2v_1 v_2 /(v_1 + v_2).$$

Substituindo os valores $v_1 = 120$ km/h e $v_2 = 60$ km/h, obtemos $v = 80$ km/h.

Moral da história: a velocidade média no percurso todo é a média harmônica das velocidades na ida e na volta.

A média harmônica geralmente aparece em problemas que envolvem velocidades, vazões, freqüências e taxas. O exemplo seguinte é uma versão simples de um problema de vazão bastante conhecido.

• O problema das torneiras

Se uma torneira enche um tanque em 60 minutos e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 30 minutos, em quanto tempo as duas torneiras juntas enchem o tanque?

Os leitores estão convidados a resolver mais esse problema, e para isso damos uma pequena "dica": a resposta não é a média harmônica de 60 min e 30 min, mas está relacionada a ela.

Problemas de torneiras são antiqüíssimos. Uma de suas versões aparece por exemplo na *Antologia grega* organizada por Metrodoro, um matemático grego que vivia por volta do ano 500 d.C. A tradução para o português seria mais ou menos a seguinte:

Eu sou um leão de bronze; de meus olhos, boca e pé direito jorra água. Meu olho direito enche uma jarra em dois dias, meu olho esquerdo em três dias, e meu pé direito em quatro dias. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas, diga-me quanto tempo os quatro juntos levarão para enchê-la?

Para finalizar esta seção, mais um problema.

• O problema do uísque

Durante 4 meses consecutivos, o sr. Mário comprou uísque para o bar de sua casa aos preços, respectivamente, de 16, 18, 21 e 25 reais por garrafa. Qual foi o custo médio do uísque para o sr. Mário nesse período todo?

Esse é um daqueles problemas que nos deixam frustrados, pois só depois de muita batalha notamos que faltam dados; temos necessariamente que introduzir alguma hipótese para poder resolver o problema.

i) Uma hipótese plausível é que, talvez por ser um bebedor regular, o sr. Mário tenha comprado a *mesma quantidade* x de uísque a cada mês.

Logo, ele despendeu

$$16x + 18x + 21x + 25x = 80x \text{ reais}$$

para comprar uísque no período. Daí, o custo médio no período de 4 meses foi de $80x/4x = 20$ reais por garrafa. Portanto, caso essa hipótese seja verdadeira, o custo médio no período é a *média aritmética* dos custos mensais.

ii) Uma outra hipótese plausível é que, talvez por não ter tido aumento de salário nesse período, o sr. Mário tenha gasto a *mesma quantia* y de reais a cada mês.

Logo, ele consumiu

$y/16 + y/18 + y/21 + y/28$ garrafas no período. Assim, o custo médio nesse período foi, aproximadamente:

$4y/ (y/16 + y/18 + y/21 + y/28) = 19{,}5$ reais por garrafa.

Portanto, neste caso, o custo médio no período é a *média harmônica* dos custos mensais.

Conclusão

Nosso passeio termina com um mergulho no mundo imaginário, por meio de um problema-narrativa, isto é, um problema de Matemática que, pela forma de sua apresentação, se configura também como uma narrativa, um conto, uma fantasia.

Há muito tempo, na Lemúria, um país que, por descuido dos cartógrafos, não aparece em atlas nenhum, a moeda oficial era o xelim. E, *como nessa época havia uma inflação galopante, seus habitantes tinham o hábito de comprar e vender dólares, quase todos os dias.*

Robson comprou dólares em três dias consecutivos: no primeiro dia, ao câmbio de 16 *xelins por dólar; no dia seguinte, ao câmbio de* 20 *xelins por dólar e no terceiro dia, ao câmbio de* 25 *xelins por dólar. Isso quer dizer que nesses três dias o doleiro vendeu dólares para Robson ao câmbio de* 1/16 *de dólar por xelim,* 1/20 *de dólar por xelim e* 1/25 *de dólar por xelim, respectivamente.*

No quarto dia, Robson, já se sentindo um cliente especial, propôs ao doleiro que ele vendesse dólares, não no câmbio do dia, mas na média aritmética dos câmbios dos três dias anteriores. Ele disse para o doleiro:

— Você faz a média aritmética das suas taxas de câmbio e me diz quantos dólares você me dá para cada xelim. Aí eu inverto e sei quantos xelins lhe pago para cada dólar que você me der.

O doleiro respondeu:

— Vamos simplificar as contas, Robson. Você comprou dólares nas taxas de 16, 20 *e* 25 *xelins por dólar. Aí você tem que me pagar* 61/3 *xelins por dólar, isto é, para cada lote de* 61 *xelins lhe dou 3 dólares.*

Aí Robson contestou: — Espere aí, eu faço as contas. Para cada xelim você me deu 1/16 *de dólar no primeiro dia,* 1/20 *de dólar anteontem e* 1/25 *de dólar ontem. Logo, você tem que me dar para cada xelim a média aritmética:* $(1/16 + 1/20 + 1/25)/3 = 61/1200$ *de dólar. Pago então* 1200/61 *xelins por dólar, ou seja, pago* 1200 *xelins para cada lote de* 61 *dólares.*

O doleiro retrucou: — Não é possível, você se enganou nas contas!

E ficaram discutindo um longo tempo, porque um não concordava com os cálculos do outro. E continuam discutindo até hoje, aguardando ansiosamente a passagem de *O Homem que Calculava ...*

Equações e inequações com radicais

Geraldo Ávila

Introdução

Muitos professores encontram dificuldades ao lidar com equações e inequações com radicais. Nosso objetivo aqui é o de chamar a atenção para a classe mais comum dessas equações e inequações, cujo tratamento repousa sobre certos pontos básicos que, quando levados em conta, evitam as dificuldades a que nos referimos.

Um primeiro equívoco

Outro dia procurou-me um professor, querendo entender o modo correto de resolver a seguinte equação: $x^2 = 16$. Perguntou-me então se estaria correto proceder assim: $x^2 = 16 \Leftrightarrow \pm x = \pm 4$, com quatro possibilidades de escolha de sinais: $+x = \pm 4$ e $-x = \pm 4$, resultando nas duas soluções $x = \pm 4$.

Com um balançar de cabeça, eu dei a entender que não aprovava. Ele insistiu: mas, professor, não é verdade que

$$\sqrt{x^2} = \pm x \quad \text{e} \quad \sqrt{16} = \pm 4 \, ?$$

Aí eu fui bem explícito e disse: Não! não é bem assim.

De fato, às vezes escrevemos coisas como

$$\sqrt{16} = \pm 4 \, ,$$

mas isso não está certo. Trata-se de um "abuso de notação". Não existem coisas que os lingüistas chamam de "abuso de linguagem", "licença poética" e "licença literária"? Pois os matemáticos também incorrem em "abusos de notação" e de "linguagem". Não tem muita importância, pode até ser uma conveniência, mas é preciso ter consciência do que se está fazendo. Por exemplo, ao lidarmos com a função que leva x em $\sqrt{x}$, dizemos e escrevemos corretamente assim: "seja a função $x \to \sqrt{x},\ \ x \geq 0$ ". É um abuso de notação dizer "seja a função $y = \sqrt{x}$ ", pois, a rigor, essa última expressão é apenas um valor particular da função, aquele que ela assume no valor "x" da variável independente; além disso, nesse último modo de falar nem estamos especificando o domínio da função, deixando-o subentendido.

Voltando ao caso da raiz quadrada, escrever $\sqrt{16} = \pm 4$ é um abuso de notação porque o radical tem um significado único: sendo a um número positivo, $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada positiva, nunca a negativa (é claro que se poderia ter convencionado o contrário, isto é, $\sqrt{a}$ significando a raiz negativa, não a positiva). Tanto é assim que, quando escrevemos a fórmula de Báskara, tomamos o cuidado de usar o duplo sinal de mais e menos na expressão $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Como então resolver a equação proposta? Pelo que dissemos, $\sqrt{x^2}$ é o número positivo $|x|$, isto é,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(e nunca $\sqrt{x^2} = x$, pois x pode ser negativo).

Analogamente, $\sqrt{16} = 4$, de sorte que $x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$ e pronto, é isso aí! Na prática, costumamos suprimir a parte do meio e simplesmente escrever: $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Um outro exemplo

Vamos esclarecer melhor essas coisas, considerando a seguinte equação, um pouco mais complicada que a anterior:

$$\sqrt{4 - x} = x - 2. \quad (1)$$

É claro que, ao escrever essa equação, já estamos supondo que $4 - x \geq 0$, isto é, que $x \leq 4$. Para resolvê-la, elevamos ambos os membros ao quadrado, obtendo:

$$\sqrt{4-x} = x - 2 \Rightarrow 4 - x = (x-2)^2 \Leftrightarrow 4 - x = x^2 - 4x + 4 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -x + 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ e } \ x = 3.$$

Dessas duas soluções, somente $x = 3$ resolve a equação inicial. Com o outro valor, $x = 0$, a equação inicial ficaria sendo $\sqrt{4} = -2$, que está errado, pois $\sqrt{4}$ significa sempre +2.

Na verdade, o outro valor encontrado, $x = 0$, é a solução da outra equação, aquela que leva sinal negativo, ou seja:

$$-\sqrt{4-x} = x-2. \quad (3)$$

Tanto essa equação, como a equação inicial, ao serem elevadas ao quadrado, implicam a mesma equação $4 - x = (x - 2)^2$. Essa, sim, tem duas soluções: $x = 0$ e $x = 3$, uma que é solução de $+\sqrt{4-x} = x-2$. e outra que é solução de $-\sqrt{4-x} = x-2$..

Com esse exemplo fica bem clara a importância de se convencionar que o símbolo $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada positiva de a, qualquer que seja o número positivo a, pois é necessário que tal símbolo tenha significado único e preciso sempre. Do contrário, a equação (1) não seria uma equação só, mas conteria também a equação (3), ou seja, estaríamos lidando com

$$\pm\sqrt{4-x} = x-2.$$

Temos duas equações, as quais, juntas, equivalem à segunda equação que aparece em (2), isto é,

$$\pm\sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow 4-x = (x-2)^2.$$

Observe que a primeira implicação em (2) é apenas da esquerda para a direita, não valendo a volta.

No fundo, o que estamos usando em nosso procedimento é a seguinte propriedade dos números:

se a e b são números não
negativos, então $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Como se vê, precisamos ter certeza de que os números a e b sejam não-negativos. Se não tivermos essa informação, só podemos escrever $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ (e nunca $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$).

Em nosso caso concreto, $a = \sqrt{4-x}$ e $b = x - 2$

Podemos também escrever: se a e b são números quaisquer, então

$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$$

ou, ainda,

$$a^2 = b^2 \iff a = \pm b.$$

Observe que $a = \pm b$ é outro modo de dizer que a e b têm o mesmo valor absoluto, isto é, que $|a| = |b|$. Assim, com $a = \sqrt{4-x}$ e $b = x-2$, podemos escrever:

$$(\sqrt{4-x})^2 = (x-2)^2 \iff \left|\sqrt{4-x}\right| = |x-2|,$$

ou ainda, de maneira equivalente, $(\sqrt{4-x})^2 = (x-2)^2 \iff \pm\sqrt{4-x} = x-2$.

Para dar mais um exemplo de que o símbolo $\sqrt{a}$ deve significar apenas uma das raízes de a, considere a equação:

$$\sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{1+3x}.$$

E agora, a primeira raiz quadrada que aí aparece é positiva? Negativa? E a segunda? É justamente para evitar tais ambigüidades que convencionamos, de uma vez por todas, que o símbolo $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada não-negativa de a.

Inequações e valor absoluto

Como se faz para resolver a inequação $x^2 < 9$? Será correto simplesmente extrair a raiz quadrada e escrever $x < 3$? Não, isso é errado, pois $x = -4$ é menor que 3, no entanto $(-4^2) = 16$ é maior do que 9.

Lembremos que x^2 é o mesmo que $|x|^2$, de forma que o correto é

$$x^2 < 9 \iff |x^2| < 9 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

Assim, a solução da inequação $x^2 < 9$ é o conjunto dos números do intervalo $(-3, 3)$.

O que usamos na resolução da inequação acima foi a seguinte propriedade dos números:

se a e b *são números não negativos, então* $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$.

Outro exemplo: $x^2 > 25$.

Temos, agora,

$$x^2 > 25 \Leftrightarrow |x^2| > 25 \Leftrightarrow |x| > 5.$$

As soluções são os números tais que $|x| > 5$. Ora, isso acontece com $x > 5$ ou $x < -5$.

A Linguagem Lógica

Iole de Freitas Druck

O trabalho com a Lógica durante o curso de Magistério não deve ser um ponto programático localizado em algum momento específico da estrutura curricular, mas sim deve ser uma preocupação metodológica presente sempre que algum ponto do programa permitir ou que o interesse da turma justificar uma exploração mais detalhada.

Trata-se de um tema com amplas conotações interdisciplinares e que se torna mais rico na medida em que for possível perceber o quanto a lógica permeia as conversas informais entre amigos, a leitura de jornais ou revistas e as diversas disciplinas do currículo – não é um instrumento só da Matemática.

O objetivo principal de um certo domínio da lógica é o do desenvolvimento da capacidade de usar e entender um discurso correto, identificando construções falaciosas, ou seja, incorretas, mas com a aparência de correção lógica. Desenvolver no aluno a capacidade de argumentar e compreender argumentos, bem como a capacidade de criticar argumentações ou textos.

Para perseguir este objetivo é menos importante ou motivante um curso de lógica formal ou aristotélica, e mais relevante a discussão de exemplos e contra-exemplos de "afirmações lógicas". Aprende-se mais, talvez, resolvendo uma charada lógica ou percebendo que se pode chegar a uma conclusão falsa através de caminhos aparentemente lógicos do que, por exemplo, simples mente decorando uma tabela de verdade. Esta última não é uma arbitrariedade decidida por um gênio maluco – é uma necessidade do raciocínio correto, que só percebemos no uso concreto, com exemplos significativos. Assim, por exemplo, a resolução do problema "Uma Aventura de Alice", abaixo descrito, pode ser uma motivação interessante para a introdução das tabelas de verdade e ao mesmo tempo ser uma atividade instigante para os alunos:

Exercício 1

Uma Aventura de Alice

Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O Leão e o Unicórnio eram duas estranhas criaturas que freqüentavam a floresta. O Leão mentia às segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O Unicórnio mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

Problema 1

Um dia Alice encontrou o Leão e o Unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

A partir dessas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Problema 2

Em outra ocasião Alice encontrou o Leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei daqui a 3 dias.

Qual era o dia da semana?

Problema 3

Em qual dia da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei amanhã.

Problema 4

Em que dias da semana é possível o Leão fazer cada uma das seguintes afirmações:

(a) Eu menti ontem e eu mentirei amanhã.

(b) Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.

(c) Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.

(d) Menti ontem se, e somente se mentir amanhã.

Resolução:

Dia da semana	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	sáb.	dom.
Leão	M	M	M	V	V	V	V
Unicórnio	V	V	**V**	M	M	M	V

Problema 1

– Pela resposta do Leão, pode ser 2ª ou 5ª.

– Pela resposta do Unicórnio, pode ser 5ª ou domingo. Portanto, como os dois se referiam a um mesmo dia da semana, este era quinta-feira.

Problema 2

– Por (1), o dia poderia ser 2ª ou 5ª.

– Por (2), como o Leão mentirá 3 dias depois de hoje, hoje pode ser 2ª, 3ª, 4ª, 6ª, sábado, domingo.

Logo, o dia da semana era segunda-feira.

Problema 3

– A afirmação (1) pode ser feita 2ª ou 5ª.

– A afirmação (2) pode ser feita 4ª e domingo.

Portanto, não existe um dia na semana em que seja possível o Leão fazer as duas afirmações.

Problema 4

(a) Esta afirmação (que é uma conjunção) é uma mentira quando alguma das suas componentes for falsa, logo, como mentira, o Leão pode afirmá-la 2ª ou 4ª.

Por outro lado, ela será verdadeira somente quando suas duas componentes o forem, logo o Leão não poderá afirmá-la em nenhum dia em que fala a verdade.

Resposta

2ª ou 4ª (compare este exercício com o Problema 3 e explique por que eles são diferentes).

(b) Esta afirmação (que é uma disjunção) é mentirosa quando as suas duas componentes forem falsas, logo o Leão não poderá afirmá-la nos dias em que mente. Por outro lado, ela será verdadeira quando pelo menos uma das suas componentes o for, assim o Leão poderá afirmá-la na 5a ou no domingo.

Resposta

5ª ou domingo.

(c) Esta afirmação (que é uma implicação), composta de duas outras, só é falsa quando, sendo a primeira (premissa) verdadeira, a segunda (conclusão) for falsa. Logo, o Leão poderá fazer uma afirmação mentirosa somente na 4ª (na 2ª e na 3ª a afirmação é verdadeira – convença-se). Pelo mesmo motivo acima o Leão não poderá fazê-la na 5ª, dia em que fala a verdade. Nos demais dias de verdade ele poderá fazê-la (6ª, sábado e domingo), já que, a premissa sendo falsa, a implicação é verdadeira (pense nisso!). Resposta: 4ª, 6ª, sábado ou domingo.

d) Esta afirmação (que é uma equivalência) é verdadeira quando suas duas componentes forem verdadeiras ou quando forem as duas falsas. Assim, ela é uma mentira, dentre os dias em que o Leão mente, somente na 2ª ou na 4ª. Dentre os dias em que ele fala a verdade, ele poderá dizê-la somente na 6a ou no sábado.

Resposta

2ª, 4ª, 6ª ou sábado.

(Observação: Veja as tabelas de verdade no final do artigo.)

Existem vários livros ou revistas que contêm problemas do tipo "charada lógica". Na bibliografia citamos alguns. Estes problemas podem ser usados aqui ou ali para chamar a atenção de alguns tipos mais comuns de "falha de lógica" num raciocínio, como por exemplo:

Exercício 2

Leia as seguintes afirmações:

(1) Se um político tem muito dinheiro, então ele pode ganhar as eleições.

(2) Se um político não tem muito dinheiro, então ele não pode ganhar as eleições.

(3) Se um político pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.

(4) Se um político não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.

(5) Um político não pode ganhar as eleições se ele não tem muito dinheiro.

Responda então:

(a) Assumindo que (1) é verdadeiro, quais das outras afirmações são verdadeiras?

(b) Qual é a negação de (1)? E a sua recíproca? E a sua contrapositiva?

(Veja “definições usadas”, no final do artigo.)

(c) Mesmas perguntas para (5).

Resolução

(a) Sendo (1) verdadeiro, não se pode saber nada sobre a veracidade de (2), (3) ou (5) (observe que (2) e (5) afirmam a mesma coisa). A única que é verdadeira como decorrência de (1) é a afirmação (4).

(Observação: faça o exercício do final do artigo.)

(b) As definições dos conceitos aqui empregados estão também no final.

– A negação de (1) é: “Um político tem muito dinheiro e não pode ganhar as eleições”.

(Exercício: utilizando as observações do final, verifique que as tabelas de verdade de

$\neg (P \to Q)$ e de $P \neg Q$ coincidem.)

– A recíproca de (1) é (3).

– A contrapositiva de (1) é (4).

(c) Sendo (5) verdadeira, (2), que é a mesma afirmação com outra maneira de escrever, também será obrigatoriamente verdadeira. Também (3), que é a contrapositiva de (2), será obrigatoriamente verdadeira. Nada se pode afirmar sobre a veracidade de (1) ou (4).

– A negação de (5) é: “Um político pode ganhar as eleições e não ter muito dinheiro”.

– A recíproca de (5) é (4).

– A contrapositiva de (5) é (3).

Também se pode levar o aluno a compreender mais claramente a diferen ça entre a estrutura lógica existente num enunciado e o conteúdo propriamente dito deste enunciado por meio de exercícios, tais como:

Exercício 3

Decida quais das afirmações são válidas.

(a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos, logo nenhum pássaro é um girassol.

(b) Alguns livros são verdes e algumas coisas verdes são comestíveis. Concluímos que alguns livros são comestíveis.

(c) Como todos os peixes são mamíferos, todos os mamíferos são aves e existem minerais que são peixes, concluímos que existem minerais que são aves.

(d) Todos os homens são mortais. O presidente é um homem. Conclusão: O presidente é mortal.

(e) Alguns homens sabem nadar. Não existem peixes que não sabem nadar. Conclusão: Os peixes sabem nadar.

(f) Alguns santistas são surfistas. Alguns surfistas são loiros. Não existem professores surfistas.

Conclusões:

(1) Alguns santistas são loiros.

(2) Alguns professores são santistas.

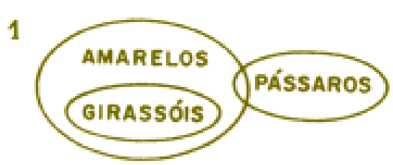
(3) Alguns loiros são professores.

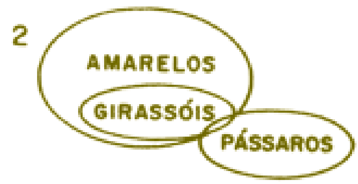
(4) Existem professores loiros.

Resolução

Neste exercício os diagramas de Venn podem ser utilizados, como a seguir:

(a) Algumas configurações possíveis para as premissas do enunciado.

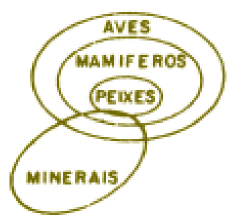




As configurações (2, 3 e 4) obtidas já nos permitem concluir que afirmação não é válida, pois existe modelo que torna a premissa verdadeira e a conclusão falsa. (Estas são as únicas configurações possíveis?)

b) Algumas configurações possíveis para as premissas do enunciado:

A configuração (2) nos permite concluir que a afirmação não é válida pelo mesmo motivo anterior. Encontre mais 3 configurações possíveis.

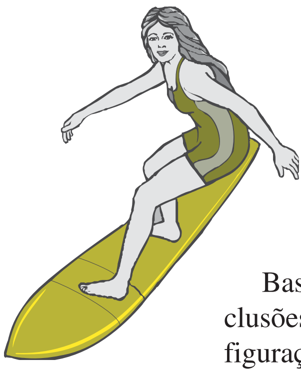


Todos aqueles minerais que forem peixes, pelo diagrama são necessariamente aves, logo a conclusão é decorrente das premissas e a afirmação é válida, apesar de poder haver outros diagramas cabíveis com a descrição das premissas – por exemplo, algum que não deixe nenhum mineral ser mamífero sem ser peixe. (Esboce um assim.)

Esta afirmação é chamada silogismo. O mais famoso deles, deixado por Aristóteles, falava de Sócrates, ao invés do presidente. E claramente válido.

(e) Esta afirmação é válida pois a conclusão é equivalente a uma das premissas.

(f) Alguns diagramas possíveis para as premissas do enunciado.



Bastam estes dois diagramas para vermos que nenhuma das quatro conclusões é válida com base nas premissas. Isso não impede que existam configurações em que todas as quatro sejam verdadeiras (faça exemplos de tais configurações onde todas as premissas sejam verdadeiras e as conclusões também). Mas para que uma implicação genérica deste tipo seja válida, não é possível que possamos exibir contra-exemplos como os acima. Uma afirmação destas só é válida quando for verdadeira em todos os modelos possíveis nos quais as premissas são verdadeiras.

Outras maneiras de trabalhar a lógica no curso de magistério são por meio de atividades interdisciplinares, seja com Física, Química, Português, História, Geografia, leitura crítica de textos de jornais ou mesmo de livros-textos das várias disciplinas.

Alguns dos tópicos do próprio currículo de Matemática são mais propícios ao uso de "demonstrações" ou "contra-exemplos" (na sistematização da Geometria notadamente) e, portanto, ao abordarmos estes tópicos, podemos sempre aproveitá-los para salientar a estrutura lógica subjacente em toda a Matemática.

Observações sobre o conteúdo lógico citado no texto:

Tabelas de verdade

Se P, Q são afirmações dadas, sendo que a letra F significa falso e a letra V significa verdadeiro, a tabela abaixo diz o valor (F ou V) nas afirmações compostas a partir de P e Q segundo o valor (F ou V) das próprias P ou Q:

		Negação	**Conjunção**	**Disjunção**	**Implicação**	**Equivalência**
P	Q	$\neg P$ não P	$P \wedge Q$ P e Q	$P \vee Q$ P ou Q	$P \rightarrow Q$ se P então Q P implica Q	$P \leftrightarrow Q$ P se e só se Q P é equivalente a Q
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Definições usadas

Dada uma afirmação P, chamamos a afirmação

“não P” ou “$\neg P$” de negação de P.

Dadas afirmações P e Q, chamamos de implicação à afirmação

“Se P então Q” ou “P implica Q” ou “$P \to Q$”.

Neste caso, a afirmação

“Se Q então P” ou “Q implica P” ou “$Q \to P$” é a sua recíproca e a afirmação

“Se não Q então não P” ou “não Q implica não P” ou “$\neg Q \to \neg P$” é a sua contrapositiva.

Exercício:

Prove que uma implicação é logicamente equivalente à sua contrapositiva, usando as tabelas de verdade, ou seja, prove que a afirmação:

“$(P \to Q)$ « $(\neg Q \to P)$” possui só V na sua tabela de verdade.

Prove também que uma implicação não é logicamente equivalente à sua recíproca, isto é, a afirmação “$(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$” possui V e F na sua tabela de verdade.

Prove ainda que a negação da negação é equivalente à própria afirmação, ou seja, que a afirmação “$\neg P \leftrightarrow P$” possui só V na sua tabela de verdade.